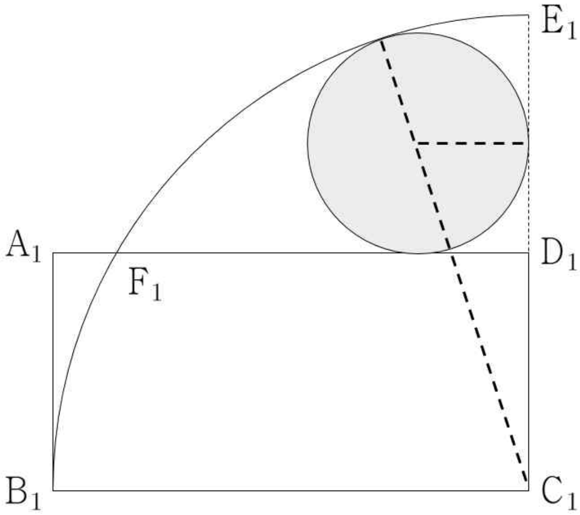
20번 풀이

같은 과정을 반복하여 얻은 원의 둘레의 길이에 대한 수열 $\{l_n\}$는 초항을 l_1으로 갖고 공비가 r로 일정한 등비수열의 합입니다.

따라서 무한등비급수의 공식에 의해 $\lim_{n\to\infty} l_n = \frac{l_1}{1-r}$ 입니다.

(i) l_1 구하기(피타고라스의 정리 활용)



원이 사분원에 접할 때 만나는 접점을 $\mathrm{H_1}$, 원이 선분 $\mathrm{D_1E_1}$에 접할 때 만나는 접점을 $\mathrm{M_1}$, 원의 중심을 $\mathrm{O_1}$이라 할 때, 작은 원이 사분원에 접하므로 $\overline{\mathrm{H_1O_1}}+\overline{\mathrm{O_1C_1}}=2$입니다. 작은 원의 반지름을 a라 하면 $a+\overline{\mathrm{O_1C_1}}=2$, $\overline{\mathrm{O_1C_1}}=2-a$ 입니다.

원이 선분 $\mathrm{D_1E_1}$에 접하므로 $\overline{\mathrm{O_1M_1}}=a$입니다.

원이 선분 $\mathrm{A_1D_1}$에 접하므로 $\overline{\mathrm{C_1M_1}}=\overline{\mathrm{C_1D_1}}+\overline{\mathrm{D_1M_1}}=1+a$입니다.

삼각형 $\mathrm{O_1M_1C_1}$이 직각삼각형이므로(원이 선분 $\mathrm{D_1E_1}$에 접함) 피타고라스의 정리에 의해

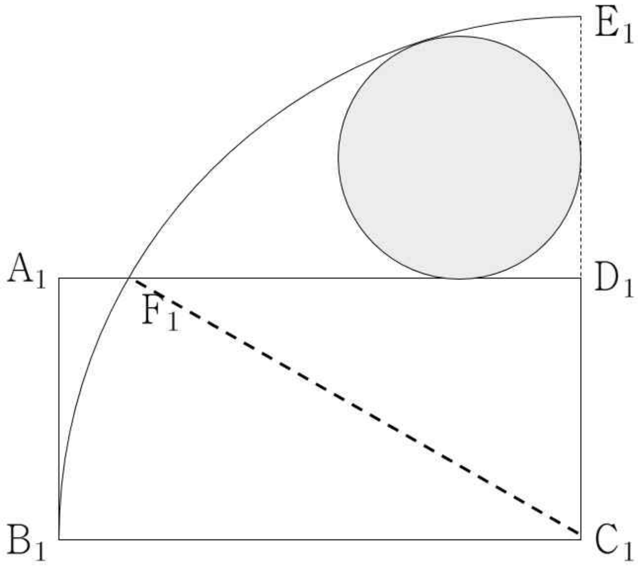
$\left\{\overline{\mathrm{O_1C_1}}\right\}^2=\left\{\overline{\mathrm{C_1M_1}}\right\}^2+\left\{\overline{\mathrm{M_1O_1}}\right\}^2$, $(2-a)^2=a^2+(1+a)^2$입니다.

a에 대한 방정식을 좌변으로 정리하면

$-a^2-6a+3=0$, $a^2+6a-3=0$이 되어 근의 공식에 의해 $a=2\sqrt{3}-3$입니다.

원의 둘레의 길이에 관한 공식에 의해 $l_1 = 2\pi a = 2\pi(2\sqrt{3}-3)$입니다.

(ii) r 구하기



공비 r은 $r = \dfrac{\overline{\mathrm{A_1F_1}}}{\overline{\mathrm{B_1C_1}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{A_1D_1}} - \overline{\mathrm{D_1F_1}}}{2}$에서 삼각형 $\mathrm{C_1D_1F_1}$이 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{C_1F_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{C_1D_1}} = 1$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{D_1F_1}} = \sqrt{3}$이 되어 $r = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$가 됩니다.

(i), (ii)에서 구한 l_1, r을 $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \dfrac{l_1}{1-r}$에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \frac{2\pi(2\sqrt{3}-3)}{1-\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}\,\pi(2-\sqrt{3})}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 4\pi(2-\sqrt{3})$$이 됩니다.

21번 풀이

(가)에서
(i) $x=-1$에서 중근이 아닌 근을 가진 다는 것을 알고
$(ii)$$x=-1$을 제외한 영역에서 중근을 가지거나 근을 갖지 않는 다는 것을 알고
(iii)(나)에서 $x=0$일 때 미분계수가 이라는 사실을 추론하여 풀이하는 것이 목적입니다.

(i)

삼차함수의 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $x=-1$에서 중근이 아닌 근을 가진 다는 것을 알고 있으므로
$f(x)=(x+1)(x^2+px+q)$임을 생각할 수 있습니다.

(ii)
$x=-1$을 제외한 영역에서 중근을 가지거나 근을 갖지 않는다는 것을 활용하면
방정식 $f(x)=(x+1)(x^2+px+q)=0$이 $x=-1$을 제외한 영역에서
중근을 갖거나 근을 갖지 않기 위해서는
이차방정식 $x^2+px+q=0$의 판별식 D가 0 이하여야 한다는 사실을 알 수 있습니다.
$$p^2-4q\le 0$$
(+) $(-1)^2-p+q\neq 0$인 것도 알고 가야 합니다. ($x=-1$을 제외한 영역에서
중근을 갖거나 근을 갖지 않기 때문입니다.)

(iii)
$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x\ge 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$ 이므로 $f'(|x|)=\begin{cases} f'(x) & (x\ge 0) \\ -f'(-x) & (x<0) \end{cases}$
실수 전체의 집합에서 함수 $f(|x|)$가 미분 가능하기 위해서는
$x=0$에서의 미분계수가 존재해야 합니다.
$$f'(0)=-f'(0),\ f'(0)=0$$

$f(x)=(x+1)(x^2+px+q)$이므로 $f'(x)=(x^2+px+q)+(x+1)(2x+p)$
$$f'(0)=q+p=0,\ p=-q$$

(ii)에서 $p^2-4q\le 0$에 $p=-q$를 대입하면
$$p^2+4p\le 0,\ -4\le p\le 0$$
$(-1)^2-p+q\neq 0$에 $p=-q$를 대입하면
$$1-2p\neq 0,\ p\neq\frac{1}{2}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2+px-p)$$
$$=x^3+(1+p)x^2-p$$

$$\int_{-1}^{1}\{x^3+(1+p)x^2-p\}\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(1+p)x^3-px\right]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{2}{3}(1+p)-2p$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}p$$

$1-2p\neq 0,\ p\neq\frac{1}{2}$과 $p^2+4p\leq 0,\ -4\leq p\leq 0$에 의해 p의 범위가 결정되므로

$\int_{-1}^{1}f(x)dx$의 최솟값 m은 $p=0$일 때 $\frac{2}{3}$

최댓값 M은 $p=-4$일 때 6이 되어

$Mm=\frac{2}{3}\times 6=4$입니다.

26번 풀이

x, y, z, w는 모두 2이상의 자연수이고 x와 w는 서로소입니다.

이 때 가능한 (x, w)는 아래와 같습니다.

$(2,3)$, $(2,5)$, $(2,7)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,7)$, $(4,5)$

또 각 경우에서 $x+y+z+w=14$에 앞서 구한 (x, w)을 대입하면

$y+z=9$와 같이 다섯 가지 경우가 나옵니다.
$y+z=7$
$y+z=6$
$y+z=5$
$y+z=4$

$y=y'+2$, $z=z'+2$라 하면 y', z'은 음이 아닌 정수이고

앞서 대입한 (x, w)에 대해 $y'+z'=5$를 만족시킵니다.
$y'+z'=3$
$y'+z'=2$
$y'+z'=1$
$y'+z'=0$

각 경우에 대한 경우의 수를 세면 아래와 같습니다.

$y'+z'=5$일 때 가능한 경우의 수는 6개	$(2,3)$
$y'+z'=3$일 때 가능한 경우의 수는 4개	$(2,5)$, $(3,4)$
$y'+z'=2$일 때 가능한 경우의 수는 3개	$(3,5)$
$y'+z'=1$일 때 가능한 경우의 수는 2개	$(2,7)$, $(4,5)$
$y'+z'=0$일 때 가능한 경우의 수는 1개	$(3,7)$

따라서 (x, w)에 대해 가능한 모든 경우의 수는 $6+4\times2+3+2\times2+1=22$가지.

앞서 구한 (x, w)에 대해 x와 w의 숫자가 바뀔 때의 경우의 수 역시 22가지로 같으므로

$22+22=44$가지.

28번 풀이

아래 표에 따라 ‘아’, ‘어’, ‘오’, ‘우’가 출력됩니다.

아	어	오	우
(1, 3)	(1, 4)	(1, 1)	(1, 2)
(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 1)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(4, 3)
(4, 4)	(4, 1)	(4, 2)	(3, 4)

입력창에 입력되는 숫자가 임의로 입력되므로
표에 정리된 16가지 순서쌍 중 하나가 나올 확률은
모두 같은 확률 $\frac{1}{16}$입니다.

기계를 작동하여 만든 문자열에 모든 문자가 한 번씩 있는 사건을 A,
입력된 두 숫자의 곱이 두 번만 짝수일 사건을 B라 하면
구하고자 하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}$입니다.

$$\mathrm{P}(A)=\left(\frac{4}{16}\right)\left(\frac{4}{16}\right)\left(\frac{4}{16}\right)\left(\frac{4}{16}\right)4!=\left(\frac{1}{4}\right)^4 4!$$이고

이 때, 입력된 두 숫자의 곱이 두 번만 짝수이기 위해선
‘어’와 ‘우’는 어떤 경우에서도 두 숫자의 곱이 짝수이므로 ‘아’와 ‘오’가 홀수여야 합니다.
따라서 확률은 아래와 같습니다.

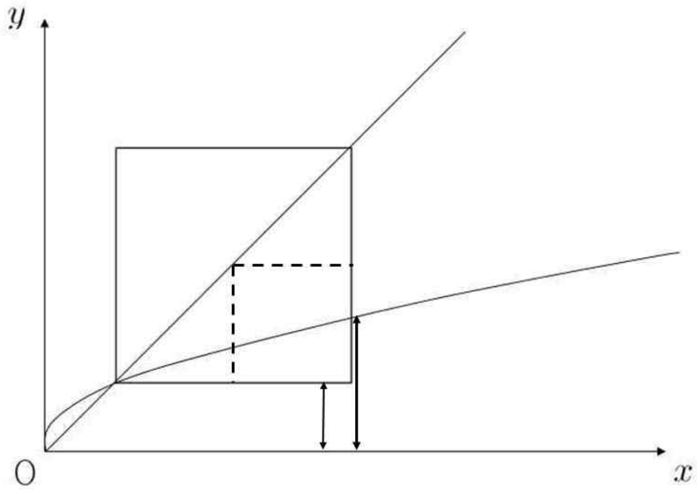
$$\mathrm{P}(B\cap A)=\left(\frac{2}{16}\right)\left(\frac{4}{16}\right)\left(\frac{2}{16}\right)\left(\frac{4}{16}\right)4!=\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 4!$$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 4!}{\left(\frac{1}{4}\right)^4 4!}=\frac{1}{4}$$

따라서 $40p=40\times\frac{1}{4}=10.$

30번 풀이

두 대각선의 중심이 (n, n)이고 정사각형 한 변의 길이가 짝수이므로
정사각형의 모든 꼭짓점의 x, y좌표는 자연수가 됩니다.



또, 2 이상의 n에 대해 정사각형의 $+x$ 방향 꼭짓점의 x좌표는 항상 2보다 크기 때문에
정사각형의 한 변의 길이를 $2r$(단, r은 자연수)라 하면
$n+r > \sqrt{n+r}$ 이 됩니다.
따라서 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프는 $x=n+r$일 때
항상 정사각형의 오른쪽 위 꼭짓점의 y좌표 보다 아래에 있습니다.

이 때 $y=\sqrt{x}$ 는 증가하는 함수이므로

오른쪽 아래 꼭지점의 y좌표 보다 $\sqrt{n+r}$ 이 작다면 만나지 않게 되게 됩니다.

마찬가지 논리에서 한 점에서 만난다면 항상 정사각형의 오른쪽 아래 꼭지점에서 만나므로

정사각형이 $y=\sqrt{x}$ 과 두 점에서 만나기 위한 자연수 r의 조건은

$\sqrt{n+r} > n-r \cdots (1)$ 입니다.

(1)식을 활용하여 가장 작은 r을 찾으면 $a_n \leq 2r$이므로 a_n의 값을 찾을 수 있습니다..

$n=2$일 때
$\sqrt{2+r}>2-r$에서 가장 작은 r은 1입니다.$(2-r=1)$

$n=3$일 때
$\sqrt{3+r}>3-r$에서 가장 작은 r은 2입니다.($(3-r=1)$

$n=4$일 때
$\sqrt{4+r}>4-r$에서 가장 작은 r은 2입니다.$(4-r=2)$

$n=5$일 때
$\sqrt{5+r}>5-r$에서 가장 작은 r은 3입니다.$(5-r=2)$

$n=6$일 때
$\sqrt{6+r}>6-r$에서 가장 작은 r은 4입니다.$(6-r=2)$

$n=7$일 때
$\sqrt{7+r}>7-r$에서 가장 작은 r은 4입니다.$(7-r=3)$

$n=8$일 때
$\sqrt{8+r}>8-r$에서 가장 작은 r은 5입니다.$(8-r=3)$

$n=9$일 때
$\sqrt{9+r}>9-r$에서 가장 작은 r은 6입니다.$(9-r=3)$

$n=10$일 때
$\sqrt{10+r}>10-r$에서 가장 작은 r은 7입니다.$(10-r=3)$

$n=11$일 때
$\sqrt{11+r}>11-r$에서 가장 작은 r은 7입니다.$(11-r=4)$
$\cdots$

자연수 r이 같은 값이 나오는 경우에서 귀납적으로 규칙을 찾아보면
무리수 $\sqrt{n+(r-1)}$의 값이 자연수 $n-(r-1)$의 값과 같게 되는 경우
즉 변의 길이가 a_n-2일 때 한 점에서 만나게 되면
자연수 r이 같은 값이 나오게 됩니다.*
(*) 규칙과 (1)에 따라서 가장 작은 r을 n의 크기에 따라 나열하면 아래와 같습니다.

$$\{1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15, 16,\ 16\ \cdots\}$$

이를 같은 값이 나오는 경우를 따로 구분하여
순서대로 나열해보면 아래와 같은 규칙을 갖는다는 사실을 알 수 있습니다.

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2,\ 2 \\ 3 \\ 4, 4 \\ 5, 6 \\ 7, 7 \\ 8, 9, 10 \\ 11, 11 \\ 12, 13, 14, 15 \\ 16, 16 \\ 17, 18, 19, 20, 21 \\ 22, 22 \\ \cdots \end{array}$$

위 규칙에 따라 $f(a)=f(b)$인 경우를 찾아보면
$r=2,\ r=4,\ r=7,\ r=11,\ r=16,\ r=22,\ r=29,\ r=37,\ r=46$일 때
$f(a)=f(b) \le 2\times 50$을 만족시키는 서로 다른 자연수 $a,\ b$가 존재하게 됩니다.
$a<b$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 9개입니다.