2017학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(가형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ① (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용한 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$\tan\theta = \tan\frac{2}{3}\pi = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

2) [정답] ② (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 벡터의 덧셈을 하고 벡터의 크기를 구할 수 있는가?

[해설]

$\vec{a}+\vec{b} = (3,\ \sqrt{3})$ 이므로

$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

3) [정답] ④ (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 순열과 중복조합의 수를 계산할 수 있는가?

[해설]

${}_4P_2 \times {}_4H_2 = {}_4P_2 \times {}_5C_2 = 4\times 3\times \frac{5\times 4}{2} = 120$

4) [정답] ② (출제자 : 15 최문영)

[출제의도] 초월함수의 극한을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^3}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\ln(1+x)}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\ln(1+x)}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 임을 이용하여 정리하면

답은 $\frac{3}{2}$ 이다.

5) [정답] ⑤ (출제자 : 15 최문영)

[출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

[해설]

두 벡터가 서로 수직이려면 두 벡터의 내적이 0 이어야 하므로,

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2+(2k+a)+(-bk-5) = (2-b)k+(a-3) = 0$

따라서 k 값에 상관없이 항상 내적이 0 이 되도록 하는 실수 a , b 의 값은

각각 $a=3$, $b=2$ 이다.

$\therefore ab = 6$

6) [정답] ③ (출제자 : 15 이상민)

[출제의도] 지수부등식을 풀 수 있는가?

[해설]

(좌변) $= 2^{2x+3} - 4^x = 2^{2x+3} - 2^{2x} = 2^{2x}(8-1) = 7\cdot 2^{2x}$

즉, 주어진 부등식은 $7\times 2^{2x} \le 7\times 2^{35}$ 이므로

$2x \le 35$ 인 자연수 x 를 구하면 $1,\cdots,17$

답은 17 개다.

7) [정답] ① (출제자 : 16 김민지)

[출제의도] 미분법을 이용하여 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$x = te^{t-2} \to \frac{dx}{dt} = (t+1)e^{t-2} \to \frac{d^2x}{dt^2} = (t+2)e^{t-2}$

$y = 3t^2-3t+2 \to \frac{dy}{dt} = 6t-3 \to \frac{d^2y}{dt^2} = 6$

따라서 점 P 의 시각 t 에서의 가속도를 $\vec{a}$ 라 하면

$\vec{a} = \left((t+2)e^{t-2},\ 6\right)$ 이고, 시각 $t=2$ 에서 $\vec{a} = (4,\ 6)$ 이므로

$a+b = 10$ 이다.

8) [정답] ⑤ (출제자 : 15 오민지)

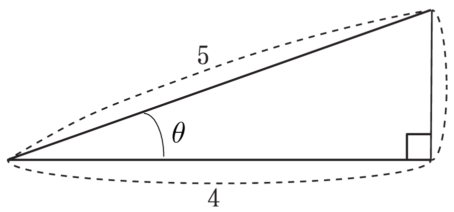
[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용해 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

직선 $y = \frac{3}{4}x$ 가 x 축과 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때,

$\tan\theta$ 는 직선 $y = \frac{3}{4}x$ 의 기울기이므로 $\tan\theta = \frac{3}{4}$ 이다.

직각 삼각형을 그려서 생각하면



$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

9) [정답] ④ (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 드모르간의 법칙을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{12}$ 에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{12}$ 이다.

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$$

따라서 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8}$

10) [정답] ⑤ (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=6$ 에서 $f(1)=5$, $f'(1)=6$ 임을 알 수 있다.

합성함수의 미분법에 의해,

$g(f(x))$ 를 미분하면 $g'(f(x))f'(x)$ 이므로

$g'(f(1))f'(1)=g'(5)f'(1)=8\times6=48$ 이다.

11) [정답] ② (출제자 : 15 최문영)

[출제의도] 주어진 이항분포를 따르는 확률변수의 확률질량함수를 이용하여 식을 정리할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=2)$ 이므로

${}_6\mathrm{C}_1(p)^1(1-p)^5={}_6\mathrm{C}_2(p)^2(1-p)^4$ 이다.

$6p(1-p)^5=15p^2(1-p)^4$ 이므로 이를 정리하면 $7p=2$

$\therefore p=\frac{2}{7}$

12) [정답] ③ (출제자 : 15 이상민)

[출제의도] 포물선의 성질을 사용하여 문제를 풀 수 있는가?

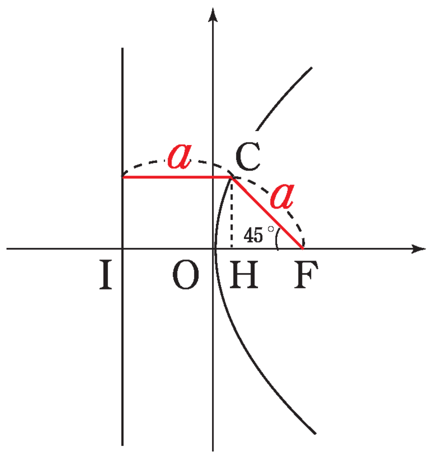
[해설]

$\overline{\mathrm{CF}}$의 길이를 a라 하면 포물선의 정의에 의하여

점 C에서 준선까지의 거리도 a이다.

아래 그림과 같이 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고,

포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 I라 하자.



$\angle\mathrm{CFO}=45^\circ$ 이므로 삼각비에 의해 $\overline{\mathrm{HF}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{IF}}=\overline{\mathrm{IH}}+\overline{\mathrm{HF}}$ 이므로 $a+\frac{a}{\sqrt{2}}=2$, 즉 $a=\frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 이다.

마찬가지 방법으로 $\overline{\mathrm{AF}}=b$라 하면 $b-\frac{b}{\sqrt{2}}=2$ 이므로

$b=\frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 임을 구할 수 있다.

따라서 직사각형 FABC의 넓이는

$$\frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8 \text{ 이다.}$$

13) [정답] ③ (출제자 : 15 최봉규)

[출제의도] 자연수의 분할을 이해하고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

파란 꽃병에 꽂는 장미꽃의 개수를 기준으로 경우를 나누어보자.

ⅰ) 파란 꽃병에 장미꽃 1송이를 꽂는 경우

장미꽃 6송이를 빨간 꽃병 2개에 1송이 이상 꽂는 경우의 수를 구하면 된다. 이것은 자연수 6을 2개의 자연수로 분할하는 경우와 같으므로 기호로 쓰면 $\mathrm{P}(6,2)$ 이다.

$6=5+1=4+2=3+3$ 이므로 $\mathrm{P}(6,2)=3$

ⅱ) 파란 꽃병에 장미꽃 2송이를 꽂는 경우

ⅰ)과 같은 방법으로 $\mathrm{P}(5,2)$를 계산하면 된다.

$5=4+1=3+2$ 이므로 $\mathrm{P}(5,2)=2$

ⅲ) 파란 꽃병에 장미꽃 3송이를 꽂는 경우

ⅰ)과 같은 방법으로 $\mathrm{P}(4,2)$를 계산하면 된다.

$4=3+1=2+2$ 이므로 $\mathrm{P}(4,2)=2$

iv) 파란 꽃병에 장미꽃 4송이를 꽂는 경우
i)과 같은 방법으로 P(3, 2)를 계산하면 된다.
$3=2+1$ 이므로 P(3, 2)$=1$

v) 파란 꽃병에 장미꽃 5송이를 꽂는 경우
i)과 같은 방법으로 P(2, 2)를 계산하면 된다.
$2=1+1$ 이므로 P(2, 2)$=1$

이 때, 파란 꽃병에 장미꽃 6송이 이상을 꽂으면 빈 빨간 꽃병이 생긴다.
따라서 파란 꽃병에 장미꽃 6송이 이상을 꽂는 경우는 존재하지 않는다.
$\therefore 3+2+2+1+1=9$

14) [정답] ④ (출제자 : 15 유정훈)
[출제의도] 평면과 직선 사이의 거리를 통해 이면각을 구할 수 있는가?

[해설]
우선 평면 α : $2x+y-2z=0$와 직선 l : $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ 이 이루는 각의 크기를 구하기 위해 평면 α의 법선벡터 $(2,1,-2)$와 직선 l의 방향벡터 $(2,2,3)$을 내적하면 $4+2+(-6)=0$이다.
이를 통해, 평면 α와 직선 l이 평행한 것을 알 수 있고, 서로 평행한 직선과 평면 사이의 거리를 구하기 위해 직선 l위의 점 $(1,3,-2)$으로부터 평면 α까지의 거리를 구하면,
$\dfrac{|2\cdot1+1\cdot3-2\cdot(-2)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|9|}{\sqrt{9}}=3$ 이다.
점 B와 점 C의 중점 M에서 평면 α에 내린 수선의 발을 N이라 하면 선분 MN의 길이가 3이고, 정삼각형 ABC의 높이인 선분 MA의 길이가 $3\sqrt{3}$ 이므로,
각 $\angle$MAN이 평면 α : $2x+y-2z=0$과 삼각형을 포함하는 평면이 이루는 이면각이다. 삼수선의 정리에 의해 $\sin\theta=\dfrac{3}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.
따라서 $\cos\theta$의 값은 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.

15) [정답] ① (출제자 : 15 유정훈)
[출제의도] 타원에서 접선의 성질을 이용해 빈칸을 채울 수 있는가?

[해설]
$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{y}$ 이므로, x와 y에 점 $\mathrm{A}\left(t, 2\sqrt{1-t^2}\right)$를 대입하면
점 A에서의 접선의 방정식의 기울기가 나온다.
$\therefore$ (가)$=-\dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$
한편, x절편을 구하기 위해 주어진 식 (*)에 $y=0$을 대입하면,
$0=-\dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}}(x-t)+2\sqrt{1-t^2}$ 에서 $x=\dfrac{1}{t}$ 이므로,
접선이 x축과 만나는 점은 $\left(\dfrac{1}{t}, 0\right)$이다.
$\therefore$ (나)$=\dfrac{1}{t}$

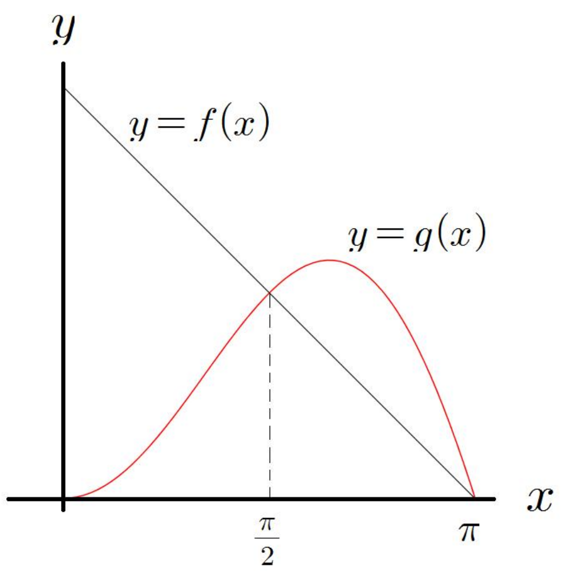
따라서 $\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OC}}$ 의 값은 $t\times\dfrac{1}{t}=1$ 이다.
$\therefore$ (다)$=1$
$f(t)=-\dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$ 이고, $g(t)=\dfrac{1}{t}$ 이고, $a=1$ 이므로,
$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=-1$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$ 이다.
따라서 구하는 답은 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)+g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1+2=1$ 이다.

16) [정답] ② (출제자 : 11 양종현)
[출제의도] 신뢰구간의 대칭성을 이용하여 표본비율, 표본의 크기 및 신뢰구간의 길이를 구할 수 있는가?

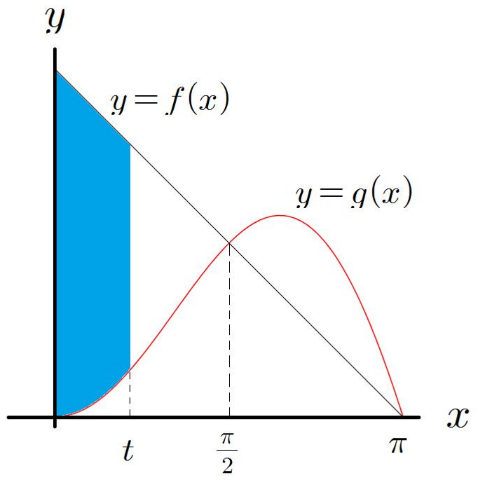
[해설]
먼저 $n\geq 320$ 임은 분명하다. 따라서 표본의 크기가 충분히 크므로 표본비율로 모비율의 범위를 추정할 수 있다.
n명의 표본에 대한 표본비율을 $\hat{p}$ 이라고 하자. 그러면 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은
$\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\leq p\leq\hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 이므로 $a+b=2\hat{p}$ 이다.
문제에서 $a+b=1.6$ 이라 하였으므로 $\hat{p}=0.8$ 이다.
표본비율의 정의에 의해 $\dfrac{320}{n}=\hat{p}=0.8$ 이므로 $n=400$ 이다.
$\therefore\ b-a=2\times1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=2\times1.96\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{400}}=0.0784$

17) [정답] ④ (출제자 : 11 양종현)
[출제의도] 1. 함수의 그래프를 보고 정적분의 최댓값을 찾을 수 있는가?
2. 부분적분법을 이용하여 주어진 함수의 정적분을 구할 수 있는가?

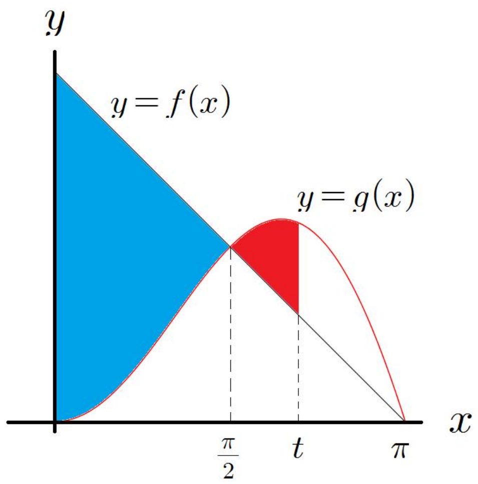
[해설] 컬러로 보세요!!



$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ 일 때, $\displaystyle\int_0^t\{f(x)-g(x)\}dx$ 의 값은 아래 그림에서 색칠된 파란색 넓이와 같다.



$\int_0^t \{f(x)-g(x)\}dx$ 의 값은 $t=\frac{\pi}{2}$ 일 때까지 계속 증가하다가, $\frac{\pi}{2}<t<\pi$ 일 때는 $f(x)-g(x)<0$ 이므로 감소하게 된다. 즉, 주어진 정적분의 값은 파란색 넓이에서 빨간색 넓이를 뺀 값이 된다.



이를 종합해보면 명백히 $t=\frac{\pi}{2}$ 일 때, 정적분

$\int_0^t \{f(x)-g(x)\}dx$ 가 최댓값을 갖는다.

그러므로 구하고자 하는 값은

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x+\pi-x\sin x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+\pi x+x\cos x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{8}\pi^2+\frac{\pi^2}{2}-1$$

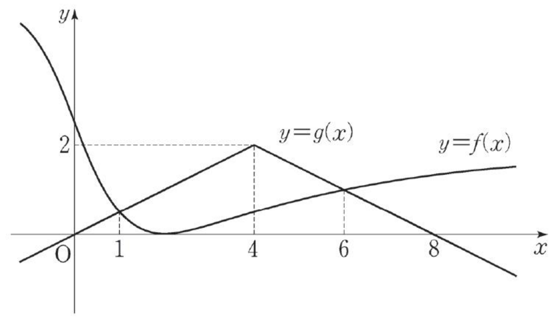
$$=\frac{3}{8}\pi^2-1$$

이다.

그러므로 $\int_0^t \{f(x)-g(x)\}dx$ 의 최댓값은 $\frac{3}{8}\pi^2-1$ 이다.

[같이 풀면 좋은 문제]

20. 함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$ 의 그래프가 그림과 같다.



$0\le a\le 8$ 인 a 에 대하여 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$ 의 최솟값은? [4점]

① $14-5\ln 5$　② $15-5\ln 10$　③ $15-5\ln 5$
④ $16-5\ln 10$　⑤ $16-5\ln 5$

<2017 학년도 6 월 모의평가 수학 가형 20 번>

ps. 혹시 6 월 모의평가 20 번 문제를 적분 후에 미분으로 푼 학생이 있다면 순수 적분으로만 다시 한 번 풀어보세요.

hint.

$$\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx=\int_0^a \{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^8 g(x)dx$$

로 변형하여 $a=6$ 일 때 최소가 된다는 사실을 확인해보세요!!

18) [정답] ② (출제자 : 15 최봉규)

[출제의도] 정규분포에서 표본평균, 표본분산, 정규분포 곡선의 그래프를 이해하고, 표본정규분포를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

확률변수 $\overline{X}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}(100, \sigma_1^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 9 인 표본의 표본평균이므로 정규분포 $\mathrm{N}\left(100, \left(\frac{\sigma_1}{3}\right)^2\right)$ 을 따르고,

확률변수 $\overline{Y}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}(100, \sigma_2^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 25 인 표본의 표본평균이므로 정규분포 $\mathrm{N}\left(100, \left(\frac{\sigma_2}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다.

위의 정규분포는 $x=100$ 에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이므로

$\int_{200-x}^{100} g(t)dt=\int_{100}^{x} g(t)dt$ 가 성립한다.

따라서 $\int_{100}^{x} f(t)dt=\int_{100}^{x} g(t)dt \cdots\cdots (*)$이다.

$(*)$의 양변을 x 에 대해서 미분하면

모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=g(x)$ 이므로

두 확률밀도함수가 같다. 따라서 분산이 같다.

즉, $\frac{\sigma_1}{3}=\frac{\sigma_2}{5}$ 이다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 102)=0.8413$ 이므로 확률변수 $\overline{X}$ 를 표준화하면

$$\mathrm{P}\left(\overline{X} \leq 102\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{102-100}{\frac{\sigma_1}{3}}\right)$$

$$= \mathrm{P}(Z \leq 0) + \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{102-100}{\frac{\sigma_1}{3}}\right)$$

$$= 0.8413$$

따라서 $0.5 + \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{102-100}{\frac{\sigma_1}{3}}\right) = 0.8413$ 이므로

$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{102-100}{\frac{\sigma_1}{3}}\right) = 0.3413$ 이다.

표준정규분포표를 이용하면 $\frac{102-100}{\frac{\sigma_1}{3}} = 1$ 이므로

$\therefore \sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 10$

따라서 $\mathrm{P}\left(\overline{Y} \leq 96\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{96-100}{\left(\frac{\sigma_2}{5}\right)}\right) = \mathrm{P}(Z \leq -2)$

$= \mathrm{P}(Z \leq 0) - \mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 0) = 0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$
$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$ 이다.

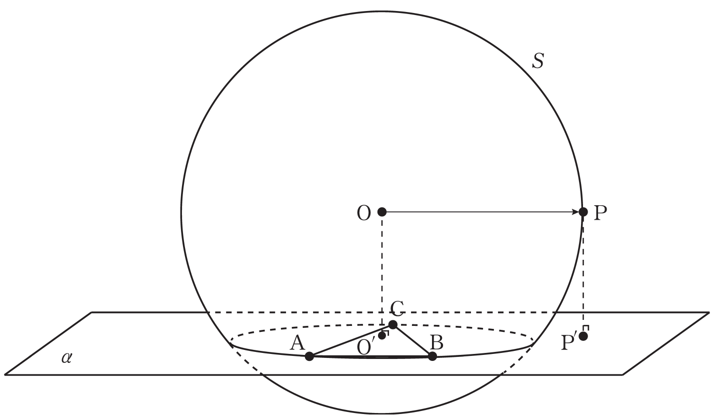
19) [정답] ⑤ (출제자 : 16 김대현)

[출제의도] 좌표공간에서 벡터의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

문제에 주어진 조건에서 $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$ 이고, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP}$ 이므로

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} \cdot \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP}\right)$ 라 할 수 있다.



두 점 O, P에서 삼각형 ABC를 포함한 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 O$'$, P$'$이라고 하자.

$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$ 에서 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OP}$가 서로 평행하고

두 점 A, B는 평면 α 위의 점이므로, 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 평면 α에 평행하다.

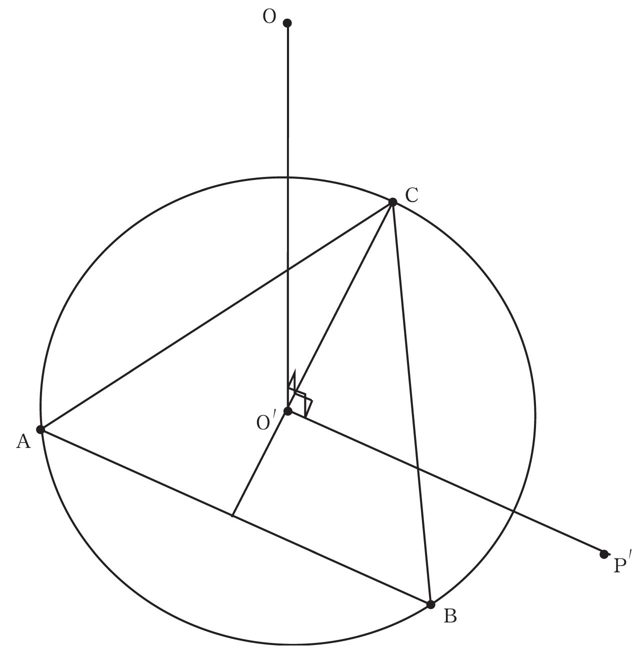
따라서 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'}$ 이고,

$\overrightarrow{O'O}$ 은 평면 α와 수직이므로 평면 α 위의 벡터 $\overrightarrow{O'P'}$과 수직이다.

$\therefore \overrightarrow{O'O} \perp \overrightarrow{O'P'}$

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OP}$가 서로 평행하고,
두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{O'P'}$이 서로 평행하므로
두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{O'P'}$ 또한 평행함을 알 수 있다.

이때, 점 O$'$는 정삼각형 ABC의 무게중심이므로, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CO'}$ 이고,
두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{O'P'}$가 평행하므로
두 벡터 $\overrightarrow{CO'}$, $\overrightarrow{O'P'}$는 서로 수직이다.
$\therefore \overrightarrow{CO'} \perp \overrightarrow{O'P'}$



두 벡터가 수직이면, 두 벡터의 내적의 값이 0이므로
$\overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{CO'} \cdot \overrightarrow{O'P'} = 0$ 이다.
따라서 $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OP} = \left(\overrightarrow{CO'} + \overrightarrow{O'O}\right) \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ 임을 알 수 있다.

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} \cdot \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP}\right)$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CO} + \frac{2}{3}\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = \frac{2}{3}\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = 54$$

20) [정답] ① (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 경우의 수, 중복조합, 자연수의 분할, 확률 등을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

공 4개를 가희, 나희, 다희, 라희 4명에게 나누어주는 경우는 자연수를 분할하는 경우와 같고, 숫자만 나열해 보았을 때 아래와 같이 총 5가지의 경우가 있다.

4 0 0 0
3 1 0 0
2 2 0 0
2 1 1 0
1 1 1 1

이 5가지 경우 중 다희가 2번 좌석에 앉을 가능성이 있는 경우를 생각해보자.

1) 4 0 0 0
다희가 공을 4개를 가지든, 0개를 가지든 2번 좌석에 앉을 수 없다.

2) 3 1 0 0
다희가 공을 3 개 가졌을 때는 2 번 좌석에 앉는 것이 불가능하다. 하지만 다희가 공을 1 개 가졌다면 2 번 좌석에 앉을 수 있다. 따라서 다희가 공을 1 개 받고 가희, 나희, 라희 중 한 명이 공을 3 개 받았다면 다희는 2 번 좌석에 앉게 된다. 따라서 경우의 수는 3 가지이다.

3) 2 2 0 0
① 가희와 다희가 각각 공을 2 개씩 가지는 경우
가희가 1 번 좌석에, 다희가 2 번 좌석에 앉게 되므로 가능한 경우이다.
② 나희와 다희가 각각 공을 2 개씩 가지는 경우
나희가 1 번 좌석에, 다희가 2 번 좌석에 앉게 되므로 가능한 경우이다.
③ 다희와 라희가 각각 공을 2 개씩 가지는 경우
다희가 1 번 좌석에, 라희가 2 번 좌석에 앉게 되므로 불가능한 경우이다.
따라서 경우의 수는 ①과 ②의 경우 총 2 가지이다.

4) 2 1 1 0
다희와 라희가 각각 공을 1 개씩 가지고, 가희와 나희 둘 중 1 명이 공을 2 개 가지는 경우가 있다. 다희와 라희가 가진 공의 개수가 같고, 다희는 라희보다 키가 크기 때문에 2 번 좌석에 앉게 된다.
따라서 경우의 수는 가희, 다희, 라희가 각각 2 개, 1 개, 1 개씩 가지고 있는 경우와 나희, 다희 라희가 각각 2 개, 1 개, 1 개씩 가지고 있는 경우 총 2 가지이다.

5) 1 1 1 1
모두가 같은 공의 개수를 가지므로 키 순서대로 앉게 된다. 따라서 다희는 3 번 좌석에 앉으므로 불가능한 경우이다.

전체 경우의 수는 4 개의 공을 4 명에게 임의로 나누어주는 것이므로 방정식 $x+y+z+w=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 구하는 것과 같다. 전체 경우의 수는 중복조합을 이용하여 구해보면 ${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$ 이다.
위에 있는 식을 토대로 다희가 2 번 좌석에 앉을 확률을 계산하면 $\dfrac{2)+3)+4)}{{}_4\mathrm{H}_4}=\dfrac{3+2+2}{35}=\dfrac{1}{5}$ 이다.
따라서 답은 ① $\dfrac{1}{5}$ 이다.

21) [정답] ③ (출제자 : 11 양종현)
[출제의도] 1. 극한값의 존재성과 연속성만으로 함숫값을 찾을 수 있는가?
2. 함수의 미분가능성과 최대 · 최소를 이용하여 그래프의 개형을 추론할 수 있는가?

[해설]
(나) 조건에서 $h>0$ 일 때와 $h<0$ 일 때로 범위를 나눠야한다.
(1) $0<h\le 1$ 일 때
부등식 $0\le \dfrac{f(h)-4}{h}\le \sin h$ 로부터 양변에 $\lim\limits_{h\to 0+}$ 를 취해주면
$0\le \lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(h)-4}{h}\le \lim\limits_{h\to 0+}\sin h=0$
$\therefore \lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(h)-4}{h}=0$ …… ①

(2) $-1\le h<0$ 일 때
부등식 $0\le \dfrac{f(h)-4}{-h}\le -\sin h$ 에서 양변에 -1 을 곱하면
$\sin h\le \dfrac{f(h)-4}{h}\le 0$ 이고 양변에 $\lim\limits_{h\to 0-}$ 를 취해주면
$\lim\limits_{h\to 0-}\sin h=0\le \lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(h)-4}{h}\le 0$
$\therefore \lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(h)-4}{h}=0$ …… ②

①과 ②로부터 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-4}{h}=0$ 이다.
(분모)$\to 0$ 인데 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.
따라서 $\lim\limits_{h\to 0}\{f(h)-4\}=0$ 이 성립한다.
양변에 $\lim\limits_{h\to 0}4$를 더해주면, $\lim\limits_{h\to 0}f(h)=4$ 이다.
그런데 $f(x)$ 는 미분가능한 함수이므로 연속함수이다.
그러므로 $x=0$ 에서도 연속이고, $\lim\limits_{h\to 0}f(h)=f(0)$ 이 성립한다.
$\therefore f(0)=4$

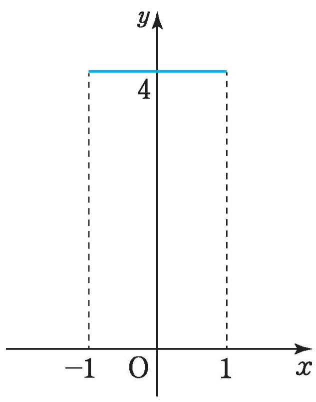
다시 (나)조건으로 돌아가서 $0\le \dfrac{f(h)-4}{|h|}$ 의 양변에 $|h|$ 를 곱하면 $4\le f(h)$ 이다. 그런데 문제에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(0)$ 이라 하였으므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 4 이다.
즉, $0<|h|\le 1$ 인 모든 실수 h 에 대하여 $4\le f(h)\le 4$ 가 성립하고, 당연히 $f(0)=4$ 이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 $f(x)=4$ 이다.
(여기부터 별해 존재)

함수 $f(x)$ 는 미분가능한 함수라 하였으므로 $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=4$ 이고 $f'(1)=0$ 이다. $|x|>1$ 에서 $f(x)=a\sin(\pi x)+b\cos(\pi x)+c$ 의 도함수는 $f'(x)=\pi a\cos(\pi x)-\pi b\sin(\pi x)$ 이다.
$f'(1)=0$ 의 조건으로부터 $f'(1)=\pi a\cos\pi-\pi b\sin\pi=-\pi a=0$
$\therefore a=0$

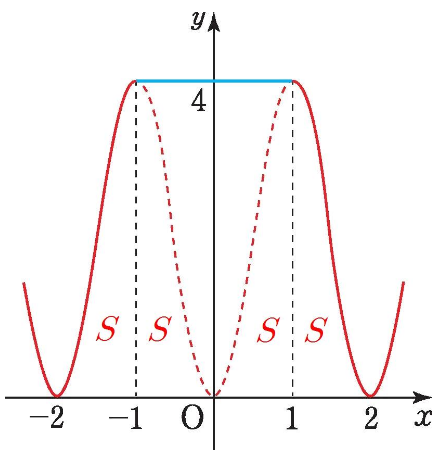
또한 $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=4$ 로부터
$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}b\cos(\pi x)+c=-b+c=4$ …… ③
$|x|>1$ 에서 $f(x)=b\cos(\pi x)+c$ 의 주기가 2 이고 $x=1$ 에서는 최댓값이 4 이어야하므로 $x=2$ 에서 문제에서 주어진 최솟값 0 을 가질 것이다.
그러므로 $f(2)=b\cos(2\pi)+c=b+c=0$ …… ④

③과 ④로부터 $b=-2$, $c=2$ 이다.
따라서 구하고자 하는 값은
$$\int_b^c f(x)\,dx=\int_{-2}^{2}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}\{-2\cos(\pi x)+2\}\,dx+\int_{-1}^{1}4\,dx+\int_{1}^{2}\{-2\cos(\pi x)+2\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)+2x\right]_{-2}^{-1}+8+\left[-\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)+2x\right]_{1}^{2}$$
$$=(-2+4)+8+(4-2)$$
$$=12$$
따라서 답은 ③ 12 이다. (* 뒷 페이지에 별해가 있습니다.)

[별해] 컬러로 보세요!!
닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 $f(x)=4$ 인 것을 알아냈다면 그 이후는 함수의 그래프를 이용하여 쉽게 구해낼 수 있다.



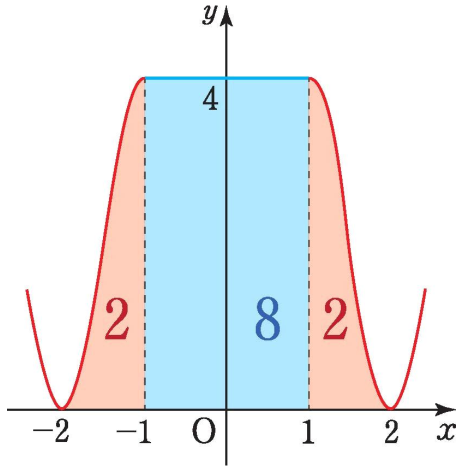
위 그림과 같은 상태에서 $|x|>1$ 일 때의 그래프를 구하는 것이 목적이다. 그림을 통해 $f'(1)=\pi a\cos\pi-\pi b\sin\pi=-\pi a=0$ 임을 추측할 수 있으므로 $a=0$ 이다. 또한 $f(x)=b\cos(\pi x)+c$ 의 최댓값이 4 이고 최솟값이 0, $|x|>1$ 에서 주기가 2 인 점을 고려해보면 아래와 같이 그려질 수밖에 없다.



빨간색의 곡선에 대해서만 살펴보자. $f(x)=b\cos(\pi x)+c$ 의 진폭이 2 이므로 $b=\pm 2$, 진동하는 중심은 $y=2$ 이므로 $c=2$ 이다. 원래 $y=\cos x$ 의 그래프는 $x=0$ 일 때 최댓값 $\cos 0=1$ 부터 그리는데, 여기서는 최솟값부터 그리므로 $b<0$ 라는 사실을 유추할 수 있다. 따라서 $b=-2$ 이다.

빨간색의 곡선은 함수 $y=-2\cos x+2$ 의 그래프인데, 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서만 상수함수 $y=4$ 로 대체했다고 보아도 무방하다. 최종적으로 실선으로 나타낸 그림이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프이다.
$\int_1^2\{-2\cos(\pi x)+2\}dx$ 의 값은 빨간색 곡선의 대칭성에 의해
$\int_0^1\{-2\cos(\pi x)+2\}dx$ 의 값을 구하는 것으로 충분함을 알 수 있다.

$\int_0^1\{-2\cos(\pi x)+2\}dx=\left[-\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)+2x\right]_0^1=2$ 이므로 넓이를 다음과 같이 세 부분으로 나누어 구할 수 있다.



따라서 답은 12 이다.

22) [정답] 6 (출제자 : 15 오민지)
[출제의도] 초월함수의 미분과 곱의 미분을 할 수 있는가?

[해설]
$f'(x)=\frac{1}{x}(x^2+1)+(\ln x+2)(2x)$ 이므로
$f'(1)=2+4=6$

23) [정답] 18 (출제자 : 15 오민지)
[출제의도] 1. 확률질량함수를 이용하여 평균을 구할 수 있는가?
2. 평균의 성질을 이용하여 주어진 값을 계산할 수 있는가?

[해설]
$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{12}+2\times\frac{4}{12}+3\times\frac{5}{12}=\frac{26}{12}=\frac{13}{6}$
$\mathrm{E}(6X+5)=6\mathrm{E}(X)+5=18$

24) [정답] 90 (출제자 : 16 이희원)
[출제의도] 순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]
6 명을 2 명씩 3 그룹으로 나누어 각 그룹을 i $(i=1, 2, 3)$ 번 좌석에 배정해보자. 한 그룹 내 2 명의 순서는 이미 키 큰 사람이 B 열에 앉고 작은 사람이 A 열에 앉도록 정해져 있으므로, 6 명을 2 명씩 3 그룹으로 나눈 후, 3 그룹을 i $(i=1, 2, 3)$ 번에 배정하는 경우의 수를 구하면 된다.
6 명을 2 명씩 3 그룹으로 나누는 경우의 수는
$\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{3!}=15$ 이고,
3 그룹을 i $(i=1, 2, 3)$ 번에 배정하는 경우의 수는
${}_3P_3=3!=6$ 이다.
따라서 구하고자 하는 경우의 수는
$15\times 6=90$ 이다.

25) [정답] 13 (출제자 : 13 이강산)

[출제의도] 음함수 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 곡선의 식에 음함수 미분법을 적용하면,

$2e^{2x}+2e^{2y}\dfrac{dy}{dx}=0$이고 이를 정리하면 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^{2x}}{e^{2y}}$이다.

주어진 점 $(\ln 4,\ \ln 2)$ 을 식에 대입하면,

접점에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{e^{2\ln 4}}{e^{2\ln 2}}=-\dfrac{e^{\ln 16}}{e^{\ln 4}}=-4$이다.

구하고자 하는 접선은 기울기가 -4이고 점 $(\ln 4,\ \ln 2)$ 을 지나므로,

접선의 방정식은 $y-\ln 2=-4(x-\ln 4)$, 즉 $y=-4x+9\ln 2$ 이다.

따라서 $a=-4$, $b=9$이므로 $b-a=9-(-4)=13$ 이다.

26) [정답] 44 (출제자 : 16 김대현)

[출제의도] 조건부 확률을 이용해 실생활 확률문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

세 명의 학생 중 적어도 한 명의 학생이 새우버거를 주문하는 사건을 사건 A, 가현이 불고기버거를 주문하는 사건을 사건 B라고 하자.

구하려는 값은 $\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 이다.

$\mathrm{P}(A)$가 적어도 한 명의 학생이 새우버거를 주문하는 확률이라면,

$\mathrm{P}(A^C)$는 아무도 새우버거를 주문하지 않을 확률이다. 이 때, 세 명의 학생은 4가지 햄버거 중 새우버거를 제외한 3가지를 고를 수 있으므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}$ 이고, $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{37}{64}$ 이다.

$\mathrm{P}(A\cap B)$는 가현이 불고기버거를 주문하고 나머지 두 명 중 적어도 한 명이 새우버거를 주문할 확률이다. 우선 가현이 불고기버거를 주문할 확률은 $\dfrac{1}{4}$ -------(1)

나머지 두 명이 모두 새우버거를 주문하지 않을 확률은 $\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{16}$ 이고 여사건을 이용하면 두 명 중 적어도 한 명이 새우버거를 주문할 확률은

$1-\dfrac{9}{16}=\dfrac{7}{16}$ -------(2)

$\mathrm{P}(A\cap B)$는 (1)과 (2)의 경우를 동시에 만족시킬 확률이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{7}{16}=\dfrac{7}{64}$ 이다.

$\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{7}{37}$ 이고 $p+q=44$ 이다.

27) [정답] 12 (출제자 : 15 이상민, 13오인수)

[출제의도] 쌍곡선과 원의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

삼각형 $\mathrm{PQF'}$의 둘레를 구하기 위해 선분 $\mathrm{PF'}$의 길이를 a라고 하면 쌍곡선의 주축의 길이가 2이므로 쌍곡선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=a+2$ 이다. 한편, 선분 PQ 의 길이가 5 이므로

$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}=(a+2)-5=a-3$

마찬가지로 선분 $\mathrm{QF'}$ 도 쌍곡선 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{QF'}}=(a-3)+2=a-1$ 이다.

선분 PQ 가 원의 지름이고 점 $\mathrm{F'}$ 이 원 위의 점이므로 원의 성질에 의해 $\angle \mathrm{PF'Q}=90^\circ$ 이다.

즉, 직각 삼각형 $\mathrm{PF'Q}$에서 피타고라스 정리를 사용하면

$5^2=a^2+(a-1)^2$ 이므로 $a=4$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}=4$, $\overline{\mathrm{F'Q}}=3$ 이므로 삼각형 $\mathrm{PF'Q}$ 의 둘레는

$4+3+5=12$ 이다

28) [정답] 10 (출제자 : 11 양종현)

[출제의도] 치환적분을 이용하여 주어진 정적분을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(\sqrt{2x})\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}(x-2x^2)e^{x^2}dx$$

에서 $\sqrt{2x}=t$로 치환하면 $x=\dfrac{t^2}{2}$으로부터 $dx=t\,dt$

이고 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{1}{2}$일 때 $t=1$이다. 그러므로

(준식)

$$=\int_0^1 tf(t)\,dt+\int_0^{\frac{1}{2}}(t-2t^2)e^{t^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} tf(t)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 tf(t)\,dt+\int_0^{\frac{1}{2}}(t-2t^2)e^{t^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} 2t^2e^{t^2}dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 te^{t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{2}}(t-2t^2)e^{t^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2t^2e^{t^2}-2t^2e^{t^2}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 te^{t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{2}} te^{t^2}dt$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 te^{t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{2}} te^{t^2}dt$$

$$=\int_0^1 te^{t^2}dt$$

이다. 여기서 $t^2=y$로 치환하면 $2t\,dt=dy$로부터 $t\,dt=\dfrac{1}{2}dy$

$$\therefore \int_0^1 te^{t^2}dt=\int_0^1 \frac{1}{2}e^y\,dy=\left[\frac{e^y}{2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$ 이므로 $10(a-b)=10$

[출제자의 말]

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x-2x^2)e^{x^2}dx$ 에서 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{x^2}dx$는 치환적분 계산이 된다고 할지라도 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2x^2e^{x^2}dx$은 치환적분과 부분적분이 모두 불가능한 상태이기 때문에 따로 계산하려고 해서는 안 됩니다. 따라서 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(\sqrt{2x})\,dx$ 와 같이 한꺼번에 계산해야겠다는 생각을 하셔야 됩니다.

그렇다고 $\sqrt{2x}$ 를 $f(x)$에 대입하는 순간 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2x^2e^{x^2}dx$를 상쇄시킬 e^{x^2}이 e^{2x}로 바뀌기 때문에 계산이 불가능해집니다. 따라서 남은 유일한 방법은 $\sqrt{2x}$ 를 직접 치환하는 것뿐이고, 실제 계산과정은 해설과 같습니다.

29) [정답] 96 (출제자 : 15 이상민)

[출제의도] 이면각과 정사영의 단면화를 통하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

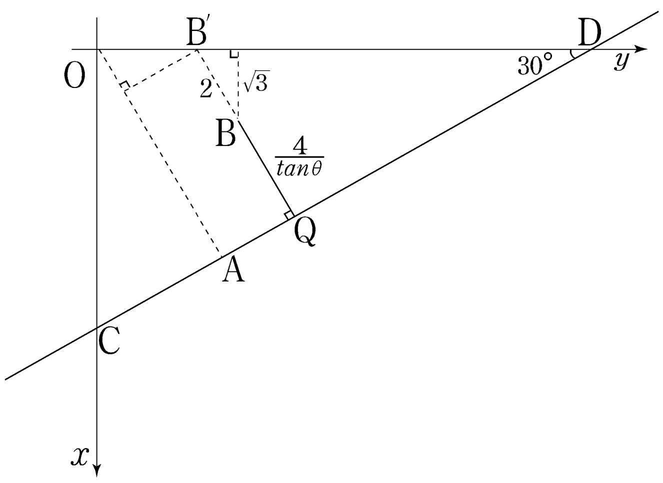
정사영의 넓이를 구하는 문제이므로 평면 α 와 xy 평면 사이의 이면각을 θ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$라고 하자. 평면 α 와 평면 β가 서로 수직이므로 평면 β와 xy 평면 사이의 이면각은 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 임을 알 수 있다.

점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q라 할 때,

$\overline{\mathrm{PB}}=4$이고, 직선 PB와 xy 평면이 수직이고, 직선 BQ와 직선 l이 수직이므로 삼수선의 정리에 의해 두 직선 PB와 BQ는 서로 수직이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{4}{\tan\theta}$ 이다.

xy 평면을 xy 평면에 수직인 방향으로 바라보면 다음 그림과 같다.



직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하고,

선분 QB를 연장한 직선이 y축과 만나는 점을 B′하면,

점 B의 좌표가 $(\sqrt{3}, 5, 0)$ 이고, 삼각비에 의해

$\overline{\mathrm{BB'}}=2$, $\overline{\mathrm{OB'}}=4$ 임을 알 수 있다. 마찬가지로 삼각비에 의해

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OB'}}+\overline{\mathrm{B'D}}=\overline{\mathrm{OB'}}+2\overline{\mathrm{B'Q}}=\frac{8}{\tan\theta}+8$,

$\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OD}}=\frac{4}{\tan\theta}+4$ 임을 알 수 있다.

삼각형 OAB의 밑변을 선분 OA 라 했을 때, 선분 OA 와 선분 B′Q 가 평행하므로 삼각형 OAB의 높이는 점 B′과 선분 OA 의 거리와 같다.

점 B′과 선분 OA의 거리는 $\overline{\mathrm{OB'}}\times\sin\frac{\pi}{3}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ 이다.

그러므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\left(\frac{4}{\tan\theta}+4\right)=4\sqrt{3}\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)$

평면 β와 xy 평면의 이면각은 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 이므로

삼각형 OAB의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$$4\sqrt{3}\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=4\sqrt{3}\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)\sin\theta$$
$$=4\sqrt{3}(\sin\theta+\cos\theta)$$

이다.

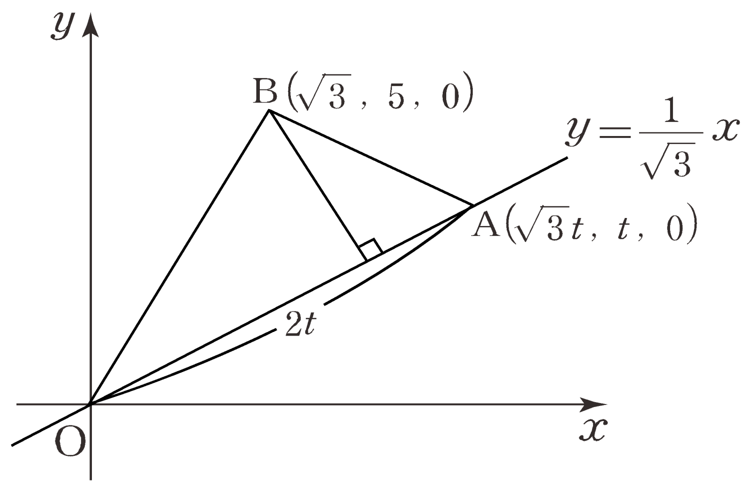
삼각함수 합성의 의해

$4\sqrt{3}(\sin\theta+\cos\theta)=4\sqrt{6}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 일 때 삼각형 OAB의 넓이가 $4\sqrt{6}$ 으로 최대가 된다.

즉, k^2 의 값은 $(4\sqrt{6})^2=96$ 이다.

[별해]



z축 방향으로 xy 평면을 바라보면 점 A는 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 위의 점이므로

점 A의 좌표를 $(\sqrt{3}t, t, 0)$이라 둘 수 있다.

점 B와 선분 OA 사이의 거리는 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 와 점 B 사이의 거리이므로,

xy 평면에서 점 B$(\sqrt{3}, 5)$ 과 직선 $x-\sqrt{3}y=0$ 사이의 거리를 구하면,

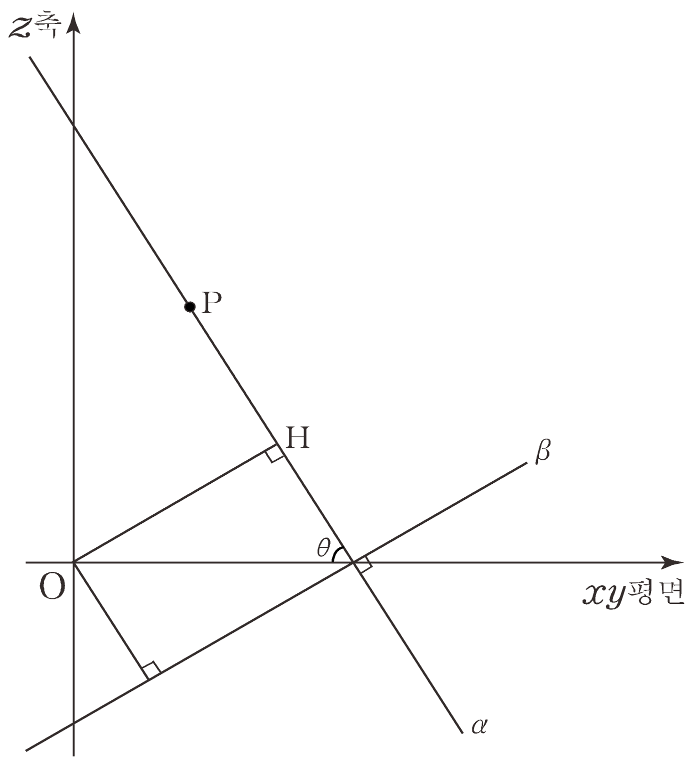
$\frac{|\sqrt{3}-5\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=2\sqrt{3}$ 이다.

$\overline{\mathrm{OA}}=2t$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2t=2t\sqrt{3}$ 이고,

이전 풀이와 같이 삼각형의 정사영의 넓이는

$2t\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2t\sqrt{3}\sin\theta$ 이다.



점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하고, 그림과 같이 평면 α와 평면 β가 직선으로 보이도록 단면화하면 $2t\sin\theta=\overline{\mathrm{OH}}$이다.

평면 α와 xy 평면의 교선이 $\sqrt{3}x+y=m$ (m은 상수) 이므로,

평면 α의 방정식을 $\sqrt{3}x+y+cz+d=0$ 으로 둘 수 있다.

점 P를 방정식의 대입하면 $d=-4c-8$ 이다.

점과 평면 사이의 거리 공식과 산술·기하평균 부등식에 의하여

$\overline{\mathrm{OH}} = \dfrac{|d|}{\sqrt{3+1+c^2}} = \dfrac{4|c+2|}{\sqrt{4+c^2}}$

$\overline{\mathrm{OH}}^2 = 16 \times \dfrac{c^2+4c+4}{c^2+4} = 16 + 16 \times \dfrac{4c}{c^2+4}$

$= 16 + \dfrac{4}{c+\dfrac{4}{c}} \le 16 + 16 \times \dfrac{4}{4} = 32$

즉, $\overline{\mathrm{OH}} \le 4\sqrt{2}$ 에서

정사영의 넓이는 $2t\sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{3}\,\overline{\mathrm{OH}} \le 4\sqrt{6}$ 이므로

따라서 k^2 의 값은 $(4\sqrt{6})^2 = 96$ 이다.

30) [정답] 63 (출제자 : 13 오인수)

[출제의도] 1. 치환적분을 통하여 주어진 함수를 파악하고, 문제에 주어진 조건을 활용하여 극점의 위치를 찾아 함수의 그래프를 그릴 수 있는가?

2. 함수의 대칭성을 활용하여 문제에 주어진 조건을 분석하고, 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

1. (가), (나)조건 파악하기

① (가)에서 $g(x) = -\displaystyle\int_b^x \frac{f(x) \times f'(t)}{\{f(t)\}^2}\,dt$ 의 식을 정리하면,

$g(x) = f(x) \times \displaystyle\int_b^x -\frac{f'(t)}{\{f(t)\}^2}\,dt = f(x) \times \left[\frac{1}{f(t)}\right]_b^x$

$= f(x) \times \left\{\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(b)}\right\} = 1 - \dfrac{f(x)}{f(b)}$ 이다.

② 따라서 $g(x) = 1 - \dfrac{e^{a(x-b)^2+c}}{e^c} = 1 - e^{a(x-b)^2}$ 이다.

③ (나)에서 $f(0) = g(0) = \dfrac{1}{2}$ 이므로

$g(0) = 1 - e^{ab^2} = \dfrac{1}{2}$ 에서 $e^{ab^2} = \dfrac{1}{2}$ 이고,

$f(0) = e^{ab^2+c} = \dfrac{1}{2}$ 에서 $e^{ab^2} \times e^c = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $e^c = 1$ 이다.

$\therefore\ c = 0$

④ 따라서 $f(x) = e^{a(x-b)^2}$, $g(x) = 1 - e^{a(x-b)^2}$ 이다.

2. 대략적인 조건 파악하기

① 곡선 $y = f(x)$ 는 직선 $x = b$ 에 대하여 대칭이고,
곡선 $y = g(x)$ 는 직선 $x = b$ 에 대하여 대칭이다.
[보충] $f(b-x) = f(b+x)$ 이고, $g(b-x) = g(b+x)$ 이다.

② 이때, $g'(x) = -2a(x-b) \times e^{a(x-b)^2}$ 이고,
$g'(0) = -2a(-b) \times e^{a(-b)^2} < 0$ 에서
$e^{a(-b)^2} > 0$ 이므로 $-2a(-b) < 0 \iff ab < 0$ 이다.

③ 한편, $e^{ab^2} = \dfrac{1}{2}$ 에서 $ab^2 = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$ 에서
$b^2 > 0$ 이므로 $a < 0$ 이다.

④ 따라서 $ab < 0$ 에서 $a < 0$ 이므로
$b > 0$ 임을 알 수 있다.

3. 구체적인 조건 파악하기

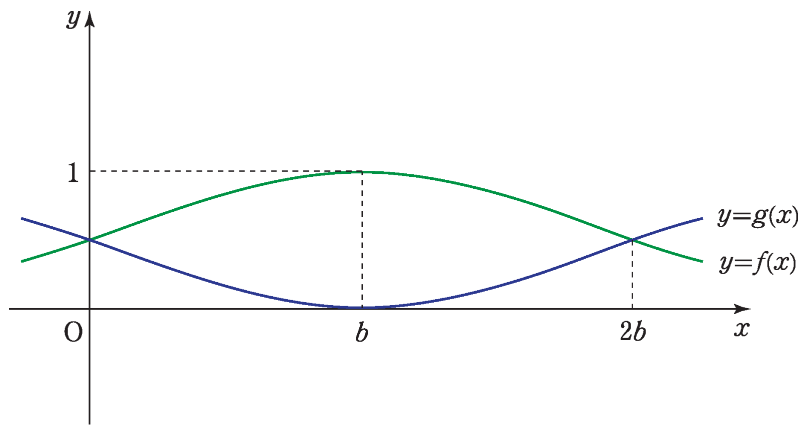
① $f(x) = e^{a(x-b)^2}$ 에서 양변을 미분하면,
$f'(x) = 2a(x-b) \times e^{a(x-b)^2}$ 이므로 $f'(b) = 0$ 이다.

② 이때, $a < 0$ 이므로
$x < b$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이고, $x > b$ 일 때, $f'(x) < 0$ 이다.
따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = b$ 에서 극댓값을 갖는다.

③ 마찬가지로 $g(x) = 1 - e^{a(x-b)^2} = 1 - f(x)$ 이므로
$g'(x) = -f'(x)$ 에서
함수 $g(x)$ 는 $x = b$ 에서 극솟값을 갖는다.

④ 이때, $f(x) + g(x) = 1$ 이므로 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는
직선 $y = \dfrac{1}{2}$ 에 대하여 대칭인 함수다.

⑤ 두 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



⑥ $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx + \int_b^8 g(x)\,dx = b$ 에서
$b = b \times 1$ 이라 할 수 있다.
즉, b 는 두 직선 $x = b$, $y = 1$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분(직사각형)의 넓이다.

⑦ 이때, $\displaystyle\int_b^8 g(x)\,dx = b - \int_0^b f(x)\,dx$ 이고,

$b - \displaystyle\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b \{1 - f(x)\}\,dx = \int_0^b g(x)\,dx$ 이므로

$\displaystyle\int_b^8 g(x)\,dx = \int_0^b g(x)\,dx$ 이다.

⑧ 곡선 $y = g(x)$ 는 직선 $x = b$ 에 대하여 대칭인 함수이므로

$\displaystyle\int_0^b g(x)\,dx = \int_b^{2b} g(x)\,dx$ 이고, 따라서 $2b = 8$ 이다.

$\therefore\ b = 4$

⑨ $ab^2 = -\ln 2$ 이므로 $\therefore\ a = -\frac{1}{16}\ln 2$

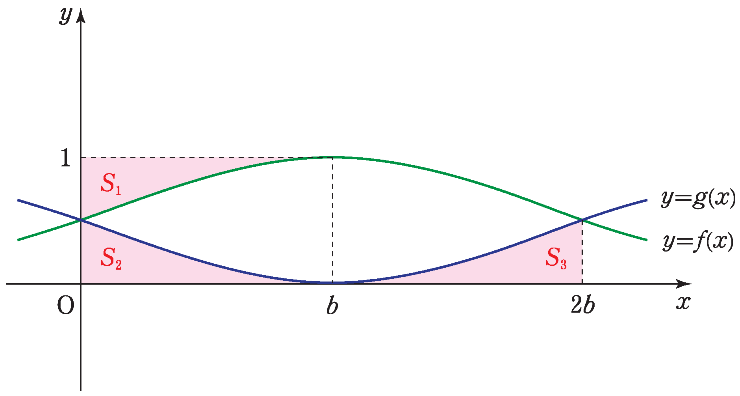
⑩ 따라서 세 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은

$-\frac{1}{16}\ln 2 + 4 + 0 = 4 - \frac{1}{16}\ln 2$ 이다.

⑪ 따라서 $p=4$, $q = -\frac{1}{16}$ 이므로

$\therefore\ 16(p+q) = 16\left(4 - \frac{1}{16}\right) = 63$

[별해] (3. 구체적인 조건 파악하기 – ⑤까지 동일합니다.)



<이 그림을 참고합니다.>

⑥ $\int_0^b f(x)\,dx + \int_b^8 g(x)\,dx = b$ 에서

$\int_b^8 g(x)\,dx = b - \int_0^b f(x)\,dx = S_1$ 이다.

⑦ <그림>에서 대칭성에 의하여 $S_1 = S_2$ 이고, $S_2 = S_3$ 이다.

⑧ 따라서 $\int_b^8 g(x)\,dx = S_1 = S_2 = S_3 = \int_b^{2b} g(x)\,dx$ 이다.

$\therefore\ 2b = 8 \ \Leftrightarrow\ b = 4$

⑨ (이후 과정은 동일합니다. 끝까지 읽어주셔서 감사합니다.)