MAGIC

MAth & loGIC

교재 개발 및 구성
솔로깡

교재 개발에 도움을 주신 분들
고종철, 정주원, 김수정, 조현우, 이상현, 노현영, 전지우, 이상범, 김준영, 김민수

제작일
2013년 11월 4일 1판 공개
2014년 9월 29일 2판 공개
2015년 11월 18일 3판 공개

교재 공개 장소
말할 수 없는 그 곳

Special Thanks To
허혁재, 안용훈

참고자료 목록 (조금이라도 참고한 자료는 모두 기술함)

- 논술 지도의 원리와 실제 VI (한국대학교육협의회 저)
- The Art And Craft Of Problem Solving (Paul Zeitz 저)
- 수리논술의 이론과 실제 (강옥기 외 2인 저)
- 수리논술 문제해결의 12가지 전략 (오승준 저)
- Calculus 4th (Robert Smith 저)
- 논술교육 길라잡이 (한국대학교육협의회 저)
- 수리논술 나침반 시리즈 (부산광역시교육청 저)
- 맛있는 해석학 (이슬비 저)
- 중고등학생을 위한 논리수학 (이슬비 저)
- Proof from the book (Ainger 저)
- 수학Ⅱ, 적분과 통계 교과서 (성지출판, 계승혁 외 5인 저)
- 수학Ⅱ, 적분과 통계 교과서 (미래엔, 유희찬 외 12인 저)
- 수리논술 교과서 (방승희 저)
- 신통 수리논술 (구자관 저)
- Basics of Reasoning (Ronald Munson, David A. Conway 저)
- 고급수학 (서울대학교 국정 도서 편찬위원회 저)
- 고등학교 고급수학 기본 (권오남 외 3인 저)
- 수학교육론 (박혜향 저)
- 중등수학 교재연구 (강옥기 저)
- 중등수학 교재연구 (유윤재 저)
- Problem Solving Strategies (Arthur Engel 저)
- 각 대학 논술 문항들 (대학교 입학처 출처 - 문제들마다 출처를 밝혀두었습니다)

Chapter 0. 필독: 주의사항

1. 본 교재는 2~3일동안 수리논술을 체계적으로 '총정리'하기 위해 만들어진 '방법론'적 교재이며 결코 본 교재 하나만으로 수리논술을 완벽하게 대비할 수 없습니다. 반드시 **자신이 응시하고자 하는 대학의 과년도 논술 혹은 모의논술 다회분을 함께 두고** 공부하십시오. 지원한 대학의 과년도 응시문항은 각 대학의 입학처 사이트를 방문하시면 업로드되어 있을 것입니다.

2. 수리논술은 그저 문제를 풀기만 하는 것이 아니라, 말 그대로 '논술' 시험이기에 푼 내용을 논리적으로 '잘 써야' 합니다. 같은 방법으로 풀었는데도 점수가 다른 이유는 채점하는 사람의 객관성에 문제가 있는 것이 아니라, 오히려 같은 방법이지만 서술에 있어서의 논리의 조밀성이 차이가 났다고 보는 것이 훨씬 옳을 것입니다. 가령 두 답안에 있어서 한 답안은 '왜 필연적으로 이 풀이로 접어들 수 밖에 없는가'를 잘 보여주었고 다른 답안은 그저 풀이와 식만 적었다고 할 때, 어느 답안에 더 큰 점수를 주겠습니까? 요컨대, **수리논술은 '잘 푸는 것'뿐만 아니라 '잘 적는 것' 또한 중요함**을 기억하셔야 하며 '잘 적는 것'을 만족시키기 위한 여러 도구들을 우리는 살펴볼 것입니다. 잘 푸는 방법에 대해서는 이미 여러분들 모두 수능을 대비하며 충분히 갈고 닦아오셨기에 굳이 더 다룰 필요는 없습니다.

3. 본 교재는 '완성본'이 아닙니다. 수리논술을 대비하기 위한 가장 핵심적이고 단편적인 내용만을, 최소한의 문항을 통해 살펴보는 정리용 교재이며 상시 업데이트 될 수 있습니다.

4. 독자는 본 저작물을 비상업적인 개인 용도로 인쇄할 수 있습니다. 독자는 이 저작물의 인쇄물이나 파일을 타사이트, 혹은 타인에게 배포할 수 없습니다. 타 저작물에 지은이의 동의 없이 끼워서 배포할 수 없습니다. 본저작물이 상업적으로 사용될 가능성을 고의적으로 제공하는 행위를 할 수 없습니다. 본 저작물의 파일을 타인이 임의로 접근할 수 있는 매체에 저장하거나 사이트에 게시할 수 없습니다. 이외의 언급되지 않은 용도로 본저작물을 사용할 수 없습니다. 저작권법에 의한 본 게시물에 첨부된 파일의 무단복제, 배포를 절대 금지합니다. 해당 게시물을 개인 학습용으로만 사용하시고, 상업적 용도로 사용하지 마십시오. 워터마크가 제거된 교재는 이 교재를 가장 처음 올린 사이트에 게시하였습니다. 말할 수 없는 그 곳으로 오십시오.

5. 전판 교재와 달라진 점 : 필요 이상으로 어려운 논제들을 모두 제외하였으며, 내용적으로 보다 간결하고 핵심적인 부분들만을 수록하였습니다. 지원 대학의 논술 기출문항들과의 연계성을 이전보다 더욱 긴밀하게 두었습니다. 보다 더 '최종 정리'에 알맞은 정도의 양으로 함축하였습니다. 하지만 과년도 교재들에 비해 교재 속에 담긴 수학적 고찰의 무게는 더욱 무거워졌습니다.

6. 마지막으로, 다시 한 번 강조드리지만 **반드시 지원 대학의 논술 기출문항과 함께 교재를 이용**하십시오. 본 교재는 '방향'을 제시해 줄 것이며, 그 방향을 따라 노를 저어 나아가는 것은 기출문제를 통한 학습이 될 것입니다. 방향만 제시되었다고 해서 모두가 목적지에 도착하는 것은 아니라는 것을 명심하십시오.

Chapter 1. 수리논술의 유형

수리논술은 정답 요구 유형, 증명 요구 유형, 의견 요구 유형, 크게 3가지로 분류됩니다. 이러한 4가지 유형에 대한 접근법은 큰 맥락은 같으나, 세부적인 차이가 있습니다.

우선, 정답 요구 유형의 문항은 최근 수리논술에서 상당히 큰 비중을 차지하고 있는 유형 중 하나로 제시문에서 주어진 도구들과 교과서에서 배운 내용들을 적당히 이용하여 문제에서 요구하는 어떠한 '답'을 구하는 것입니다. 이 일련의 과정을 '올바르게' 진행하는 것이 중요하며, 진행을 위한 최소한의 논리적 근거는 필연성과 개연성이 되있어야만 합니다. (이 부분에 대해서는 차후 chapter에 본격적으로 논의해보겠습니다.) 당연하지만, 수리'논술'이기에 정답을 올바르게 구하는 것 뿐만 아니라 정답을 구하는 과정의 아이디어와, 서술된 답안의 전체적인 논리 구조 또한 매우 중요한 평가 요소가 될 수 있습니다. 정답 요구 유형의 문제의 예시는 다음과 같습니다.

> 두 함수 $x=f(x)$, $y=g(t)$가 $t=0$에서 연속이기 위한 함숫값 $f(0)$와 $g(0)$을 각각 구하고 이 때 적분값 $\int_0^1 f(t)dt$를 구하시오. (고려대학교 2014 수시)

즉, 저런 문항을 풀기 위하여 제시문에 제시되어있는 여러 수학적 도구들과, 기본적으로 교과서에서 배워서 알고 있는 여러 정의와 정리들을 활용하여 특정한 '답'을 이끌어내는 것입니다. 이러한 '답'은 특정한 값이 될 수도 있으며, 특정한 함수 혹은 그래프가 될 수도 있습니다.

다음으로, 증명 요구 유형은 방금 전 설명한 정답 요구 유형과 함께 수리논술에서 가장 많이 출제되는 유형 중 하나입니다. 특히 이 유형은 기존의 대부분의 수험생들에게 익숙할 수능 유형과는 상당히 이질적이며 매우 높은 정도의 '논리성'을 요구하기에 체감적으로 어렵게 느껴지는 경우가 빈번합니다. 고등학교 교육과정에서의 증명 요구 유형의 문항은 대체로 3가지 정도의 '증명 방법'을 이용해야 하는 경우가 대부분입니다. 이러한 3가지의 증명 방법론은 조금 후 논의할 예정입니다.

> $\int_0^a f(x)g(x)dx= \frac{1}{2}k\int_0^a f(x)dx$임을 보이시오. (한양대학교 2013 수시)

위와 같이 '설명' 혹은 '증명'을 요구하는 문항들이 상당수 있으므로 우리는 이러한 유형에 대비해야 할 것입니다. 이 유형의 문항 또한 증명과정을 전개할 때, '필연성'과 '개연성'을 전제하여야 합니다.

마지막으로, 의견 요구 유형은 자주 출제되지는 않습니다만, 어떤 값을 구하기 위하여 계산을 하거나 증명을 할 것을 요구하기 보다는 시험 응시자의 견해를 묻고, 수학적 기반이 어느 정도로 잘 닦였는지, 혹은 수학적 센스가 얼마나 훌륭한지 간단히 테스트해보는 유형입니다. 이는 주로 심층면접에서 시행되던 형식이 수리논술의 형태를 차용한 것이라고 보아도 무방합니다. 물론, 이러한 유형도 자신의 의견을 '필연성'과 '개연성'을 중심으로 근거있게 나열하여야 합니다. 주관적인 답변은 기피하고, 최대한 논리적으로, 수학적인 근거를 바탕으로 서술하여야 합니다. 이 부분에 대해서는 사실상 최근에 기출된 적이 거의 없으므로 큰 비중을 두어 다루지는 않을 것입니다.

Chapter 2. 수학적인 논리 전개

수학이란 기본적으로 공리의 내용이 논리적으로 서술되는 학문입니다. 수학적 진술은 명제와 집합의 언어로논리성에 맞게 잘 맞추어져 있으며, 이러한 명제의 기본 성질을 이해하는 것이 곧 수학을 잘 이해하는 것입니다.

이 수학의 내용들은 증명의 과정을 통해 당위성을 부여받습니다. 증명을 통해 주어진 내용이 참인지, 혹은 거짓인지 판별할 수 있게 되고, 이 증명을 하기 위해서는 주어진 '조건'들을 잘 분석해야 합니다. 가령 수리논술에서는 제시문이나 문제에서 제한 조건을 설정해줄 것이며 이 조건들을 응용하여 증명해내는 것이 되겠습니다. 사실 이러한 조건들이 성립함을 끊임없이 증명하여 역추적 하다보면 끝이 없다는 느낌을 받게 되실 수 있습니다. 혹은, 순환논증의 오류에 빠져 A를 B로 증명하고, B를 C로 증명하고, C를 A로 증명하는 논리적 오류를 범하게 될 수도 있습니다. 이는 곧 '수학에서 가장 본질적인 조건에 해당하는 것이 무엇인가'에 대한 논의로 확장가능합니다. 즉, 증명을 하지 않을 정도로 가장 자명한 것이 무엇인가? 이 질문에 우리는 대답해야만 합니다. 수학에서는 이를 '공리'로 받아들입니다.

어떠한 개념을 정의하여 정립하기 위해서는 다른 정립된 개념이 필요한데, 그러한 개념 자체도 이미 타 개념에 의해 정의된 것이므로 결국 개념들의 나열이 이루어지며, 이렇게 계속하여 **정의**를 하다보면 언젠가는 더 이상 정의할 수 없거나, 정의할 필요가 없는 상태에 다다르게 됩니다. 이러한 개념을 '수학적 무정의 용어'라고 합니다. 마찬가지로, 수학에서 **증명**을 이어나가다보면 증명할 수 없고 정당성만을 판별할 수 있는 사실이 있으며 이를 **'공리'**라고 하게 되는 것입니다. 요컨대, 수학을 공부한다는 것은 이러한 공리를 기반으로 형성된 논리의 나열과 증명을 통해 정립된 새로운 정리들, 수학적 무정의 용어를 통해 정립된 다른 수학적 정의들을 퍼즐조각처럼 '논리의 흐름에 맞게' 짜맞추어나가는 과정인 것입니다. 이 사고를 기반으로 하여, 우리는 '수학'이라는 것이 성립하기 위한 여러 원칙들 중 4가지를 이끌어 낼 수 있을 것입니다.

1. 정의할 수 없지만, 수학적 개념으로 존재하는 **수학적 무정의 용어**가 존재한다.
2. 증명할 수 없지만, 정당성을 판별할 필요가 없는 수학적 명제인 **공리**가 존재한다.
3. 어떠한 수학적 내용이 타 수학적 내용으로부터 논리적 흐름에 따라 **추론가능하고, 증명가능하다.**
4. 수학적 논의에 사용되는 단어와 기호는 무정의 용어를 통해 성립하며, 이에 대해서 규정한 것이 **'정의'**이다. 이 정의는 수학을 하는데 있어서 상당히 중요한 밑바탕이 된다.

이미 우리는 많은 공리들을 직관적으로든, 논리적으로든 알고 있습니다. 유클리드 평행선 공리, 데데킨트의 공리 등 여러 공리들을 직접 배우진 않았지만, 직관적으로 통찰하고 있습니다. 이러한 수학적 정의, 공리들은 명제의 형태로 진술되어야만 그 의미를 정확히 전달할 수 있습니다. 명제와 공리, 정의에 대한 개념, 그리고 명제의 증명에 대한 개념은 고등학교 1학년 과정 집합과 명제에서 다루어지고 있습니다. 우리가 그 부분을 깊게 생각하지 않고 단순히 명제와 집합이 다른 것이라고 인식하게 되어서 '중요하지 않은 단원'이라는 착각을 하게 된 것 뿐입니다.

차후 Chapter 4에서 쓰게 될 것이지만, 수학에서 상당히 중요한 공리로는 '선택 공리'가 있고 '초른의 보조정리'라는 것이 있습니다. 그리고 이 두 가지와 동치인 것으로 '정렬 정리 (Well Ordering

Principle)가' 있으며, 이 정렬정리를 통해 도출가능한 것이 '최소원 법칙'입니다. 즉, 이런 것입니다. 선택공리, 초른의 보조정리, 정렬정리 셋 중 하나는 서로 순환논증의 관계에 놓여있으며, 이 중 '선택공리'를 공리로 채택하여 나머지 정리들 (초른의 보조정리, 정렬정리, 최소원 법칙 등)을 설명해내겠다는 것입니다. 이러한 개념으로 등장한 것이 '공리'입니다. 혹시 궁금해하실 분이 있을까봐 올림피아드 공부를 하셨던 분이라면 상당히 익숙할 '최소원 법칙'을 첨부합니다.

최소원 법칙 : $S \neq \phi$인 자연수 집합 N의 부분집합 S는 반드시 최소 원소를 가진다. (2. 1)

즉, 어떤 자연수의 집합의 부분집합이 최소 원소를 가진다는 성질입니다. 당연하게 받아들여지는 내용입니다. 그도 그럴 것이, 공리와 가장 직접적으로 붙어있는 정리니까요. 공리를 조금만 동치변형하면 증명할 수 있는 내용입니다. (물론 우리가 이것 까지 알아야 할 필요는 전혀 없습니다.)

일반적으로, 수학에서 사용하는 언어는 우리가 생각하는 '문제푸는 수학'이 아니라 굉장히 국어적인 것으로, 일정한 형식적인 국어적 언어를 갖게 됩니다. 그리고 이러한 형식적인 언어는 '명제'라는 틀에 의해 특정됩니다. 이러한 일종의 언어적 특성을 부여하여, 공리계에 일관성을 부여하고, 공리를 형식언어를 사용하여 진술하는 것입니다. 공리는 결코 변하지 않는 불변성과, 누가 봐도 명료한 객관성을 추구해야 하므로 형식언어로 표현하는 것이 가장 적합합니다. 그리고, 이는 우리가 '수능'을 통해서 결코 채울 수 없던 부분이기도 합니다. 수리논술과 수능의 장벽에 해당하는 첫 번째 단계이기도 합니다.

본 교재에서는 필요 이상으로 구체적인 논리 전개 방법에 대해서는 다루지 않을 계획입니다. 기호논리학과 집합론은 상당히 고차원적인 내용을 내포하고 있고, '가장 기본적인 것'만 기억해둔다고 하더라도 수리논술을 풀어나가는 것에 있어서 하등 문제가 될 것이 없기 때문입니다.

정의 : 명제는 참이나 거짓이 분명히 판단되는 문장을 말한다. (2. 2)

상당히 중요한 부분입니다. '떡볶이는 떡을 넣고 볶은 음식이다' 혹은 '자연수의 개수는 유한하다', '솔로깡은 모태솔로다' 등은 참 혹은 거짓을 판별하는 것이 가능한 명제입니다. 하지만 '햄버거는 맛있다', '솔로깡은 못생겼다', '나는 비오는 날이 좋다' 등은 참과 거짓을 명료하게 판단할 수 없기에 명제라고 할 수 없습니다. 이러한 기본적인 사실은 다들 알고 계실 것입니다.

명제의 참과 거짓을 판별하는 과정은 상당히 중요합니다. '수학적으로 의미가 있는 것'들은 기본적으로 항상 참이어야 하기 때문입니다. (물론 참도 아니고 거짓도 아닌 명제가 존재합니다만, 이는 중등교육과정에서는 다루지 않으므로, 본 교재에서도 다루지 않겠습니다. 관심있는 분들은 괴델의 불완전성 정리와 유클리드의 평행선 공리, 연속체 가설을 키워드로 검색해 보십시오.) 명제의 참과 거짓을 판별하는 과정은 눈으로 보고 바로 판별할 수도, 약간의 과정이 필요할 수도, 혹은 수백년 이상 걸릴 수도 있습니다. 심지어는 참과 거짓을 판별할 수 없는 명제도 존재하기도 합니다.

참 거짓을 판별하기 위해서는 명제를 분해해 볼 필요가 있습니다. 참 혹은 거짓을 판별하기 위한 가장 단순한 명제를 단순명제라 하고, 이러한 단순 명제들이 여러 개 묶여있는 명제를 합성명제라 합니다. 가령, 'A아저씨는 머리카락이 없고, 머리카락이 없는 사람은 대머리다'는 명제는 'A아저씨는 머리카락이 없다.' 는 명제와 '머리카락이 없는 사람은 대머리다'는 명제를 묶은 것입니다.

수학의 논리는 결국 언어형식으로 기술되므로, 언어에 있어서의 문자를 차용하여 사용합니다. 가령, 하나의 명제를 나타낼 때 p, q, r등을 사용하는 것입니다. p는 하나의 단순명제를 나타내기도 하고, 합성명제를 나타내기도 합니다. 명제를 연결하여 합성명제를 구성하는 방법 중 우리가 알아두어야 할 것은 다음과 같은 다섯가지입니다.

기호	이름	표기	국어적 의미
$\sim$	부정	$\sim p$	p가 아니다.
$\wedge$	논리곱	$p \wedge q$	p이고 q이다.
$\vee$	논리합	$p \vee q$	p이거나 q이다. (p또는 q이다.)
$\rightarrow$, $\Rightarrow$	조건	$p \rightarrow q$	p이면 q이다.
$\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$	쌍조건	$p \leftrightarrow q$	p이면 q이고 q이면 p이다.

조건과 쌍조건에서, 참임이 증명된 명제는 두 줄로, 참임이 증명되지 않은 명제는 한 줄로 표현합니다. 위의 표를 가지고는 아직까지 한 명제에 대해서 참과 거짓을 판별하기가 어렵습니다. 위의 표를 우리는 '이용하여' 한 명제의 참과 거짓을 살펴볼 것입니다. 참과 거짓을 판별하기 위해, 명제의 '진리표'를 그리는 것이 가장 일반적인 방법입니다. 어떤 명제의 참 혹은 거짓을 '진릿값'이라 하며, 참의 진릿값을 T, 거짓의 진릿값을 F라 표기하겠습니다. '부정'에 대해서는 p명제와 $\sim p$명제가 반대의 진릿값을 가진다는 사실을 우리는 이미 알고 있습니다. 논리곱과 논리합의 진릿값을 알아보겠습니다. 그러기 위해서는 '진리표'라는 것을 그려야 합니다.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

즉, 위와 같은 형태의 진리표를 그릴 수 있습니다. 위의 진리표가 이해가 가질 않는다면 어떤 특정한 명제를 두고 밴다이어그램을 그린 후, '반례가 존재하는지' 반례의 여부를 따져보시면 보다 더 직관적으로 이해가 가능할 것입니다. 여기서, $q \wedge p$와 $q \vee p$의 진리표를 추가적으로 그려본다면, 교환법칙이 성립함을 알 수 있을 것입니다. 각각의 p와 q가 가질 수 있는 경우에 대하여 모든 경우는 4가지밖에 없기 때문입니다. 이를 응용하면, 다음과 같은 복잡한 합성명제에 대한 진리표를 그릴 수 있습니다.

p	q	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim p$	$\rightarrow$	q
T	T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	T	T	F
논리 전개 순서		1	2	1	3	2	4	1

이중으로 표시된 부분에 대하여, 진릿값이 모든 경우에 대하여 True이므로, 위의 합성명제는 참인 명제가 됩니다. 다른 명제에 대해서도 '근본적으로'는 모든 이러한 과정을 거쳐 증명이 가능합니다.

Chapter 3. 연역 추론

Chapter2에서 보셨던 것과 같이, 모든 명제는 궁극적으로 진리표를 그려 참 혹은 거짓을 판별할 수 있습니다. 하지만, 이는 굉장히 소모적인 방법이며 모든 명제에 대해서 진리표를 그려 증명하려면 엄청난 시간이 걸릴 것입니다. 이러한 구조적 방법을 해결하기 위하여 나타난 것이 '연역 추론(Deductive Reasoning)'입니다.

수학에 있어서 '정리(Theorem)'라고 불리는 것들은 수학적으로 타당성이 증명된 참인 명제입니다. 이러한 정리의 정당성을 논리적으로 밝히는 일을 증명이라고 합니다. 이는 보통 '~일 때 ~이다' 등의 형태 즉, p이면 q라는 가장 기본적인 형태로 이루어져 있다고 해도 과언이 아닙니다. 이러한 형태의 **'새로 증명하고자 하는 정리'**들을 다른 **'이미 증명된 정리의 사용'**을 통해 **연역적으로 나열해가는 것**을 '연역 추론'이라 합니다. 즉, 이미 증명된 법칙들이나 공리들을 이용하여 논리적인 새로운 사실을 이끌어 내는 것을 연역 추론이라 합니다. 보다 더 구체적으로 살펴보겠습니다.

$p \to q$를 이용하여 $\sim q \to \sim p$임을 증명하라. (3. 1)

위와 같은 논제가 주어졌다고 합시다. 가령, "나는 솔로깡이다."는 명제를, "솔로깡이 아니면, 내가 아니다"는 것으로 증명하자는 것입니다. 우리는 이러한 과정을 한 번 증명해볼 것입니다.

$$p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q \quad (3.\ 2)$$

(3. 2)의 과정을 이해하시겠습니까? $p \to q$ 자체가 의미하는 것이 곧, p의 진리집합 P가 q의 진리집합 Q의 부분집합이기에 $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$의 과정이 성립합니다. 혹은, 진리표를 그려서 생각해도 됩니다. 하지만 우리는 '진리표를 누가 그려놨기에 활용해도 된다'는 생각으로 접근해보겠습니다. (그렇게 생각하시는 편이 차후 나올 내용을 받아들이기에 더욱 수월할 것입니다.)

$$\sim p \vee q \Leftrightarrow q \vee \sim p \quad (3.\ 3)$$

(3. 3)의 과정은 교환법칙이 논리합과 논리곱에서 성립하므로, 매우 자명한 내용입니다. 바로 전 챕터에서 설명한 부분입니다. 다음 과정으로 넘어가겠습니다.

$$q \vee \sim p \Leftrightarrow \sim(\sim q) \vee (\sim p) \quad (3.\ 4)$$

(3. 4)에서의 과정은 이중부정에 관한 이야기입니다. 한 번 부정한 명제를 다시 부정하면 진릿값은 원래의 명제에 대한 진릿값과 동일해진다는 내용입니다. 이 또한 당연한 이야기입니다.

$$\sim(\sim q) \vee (\sim p) \Leftrightarrow \sim q \to \sim p \quad (3.\ 5)$$

(3. 2)에서 설명한 내용과 같습니다. 이미 증명되어있는 것을 다시 차용하여 논리전개에 사용하였습니다. 이러한 (3. 2)부터 (3. 5)까지의 일련의 과정을 통해 우리는 (3. 1)을 증명할 수 있었습니다.

방금 전 방법을 요약한다면, $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$의 진리표를 그리지 않고서 '이미 진리표 혹은 다른 수단을 이용하여 논리전개가 항상 참임이 밝혀진 명제'들을 활용하여 증명해내었다는 것입니다. 이러한 방법의 증명을 우리는 '연역 추론'이라고 합니다.

방금 전 (3. 1)을 증명할 때 사용한 방법과 같이, 논리 전개가 직렬적이고 연속적으로 이어지는 증명 방법 형태를 **'직접증명법'**이라고 합니다. 우리가 익히 배워왔던 삼단논법이 이러한 직접증명법의 강력한 무기가 될 수 있습니다. 다음의 예제를 통해 연습해보겠습니다.

> 실수 위에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, w에 대하여
>
> $$|f(x)-f(w)| \le 3|x-w|^{\frac{3}{2}}$$
>
> 를 만족할 때, $f'(x)=0$임을 증명하시오. (서강대학교 2013 수시 변형)

우리는 이미 도함수의 정의를 알고 있습니다. 도함수를 구하는 방법에 있어서 '도함수의 정의'를 활용하는 것은 수능을 공부하면서 배웠던 거의 고정된 패턴입니다. 이 문항 역시 같은 방법을 적용하겠습니다. 주어진 부등식에 x, w대신 $x+h$, x를 각각 대입하면 다음의 식이 성립합니다.

$$|f(x+h)-f(x)| \le 3|h|^{\frac{3}{2}} \quad (3.\ 6)$$

이것을 도함수의 정의에 적용하면, 다음의 과정이 성립합니다.

$$|f'(x)| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \le \lim_{h\to 0}\left|\frac{3|h|^{\frac{3}{2}}}{h}\right| = \lim_{h\to 0} 3|h|^{\frac{1}{2}} \quad (3.\ 7)$$

이는 곧 다음 일련의 과정으로 나타낼 수 있습니다.

$$0 \le |f'(x)| \le \lim_{h\to 0} 3|h|^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.\ 8)$$

극한의 대소비교에 대한 성질에 의해 $|f'(x)|=0$이며, 따라서 $f'(x)=0$가 성립합니다. ■

방금 전 풀었던 문제와 같이 '기존에 확립된 정의나 정리'를 이용하여 논리를 직렬적으로 전개해나가는 증명방법을 '직접증명법'이라 합니다. 즉, "식 (3. 6)은 도함수의 정의를 만족한다. 도함수의 정의를 만족시키는 형태의 식 (3. 6)은 극한의 대소비교에 대한 성질을 만족한다. 극한의 대소비교에 대한 성질을 만족하므로 도함수의 값은 항상 0이다." 이러한 일련의 직렬적인 논리로 증명을 해나가는 것입니다. 어느 정도 감을 잡으셨을 것입니다. 보다 더 어려운 문제로 연습하겠습니다. 다음 페이지를 넘겨서 보다 더 심화된 형태의 직접증명법 논제를 풀어보도록 하겠습니다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)$는 연속이며 우함수이고, $f(x)$는 모든 실수 x에 대해서 미분가능하다고 하자. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f'(x)dx = 0$ 일 때, $f(1)=0$ 임을 증명하시오. (서울대학교 2013 수시)

직접증명법을 통해서 증명이 가능합니다. 문제에서 주어진 조건을 생각해보면 다음이 성립합니다.

$$\int_{-1}^{1} f'(x)dx = f(1) - f(-1) = 0 \quad (3.\ 9)$$

따라서, $f(1) = f(-1)$입니다. 또한 $f'(x)$가 우함수이므로 다음의 과정이 성립합니다.

$$\int_{-1}^{1} f'(x)dx = 2\int_{0}^{1} f'(x)dx = 2\{f(1) - f(0)\} = 0 \quad (3.\ 10)$$

종합하면, $f(1) = f(0) = f(-1)$이 됩니다. 이 때 $f'(x) = f'(-x)$을 변형하면 다음과 같습니다.

$$f(x) = f(0) + \int_{0}^{x} f'(t)dt \quad (3.\ 11)$$

이 식에 $-x$를 대입하고, $-t = s$를 대입한 후, $f'(x)$가 우함수임을 이용하면 아래와 같은 과정이 성립합니다.

$$f(-x) = f(0) + \int_{0}^{-x} f'(t)dt = f(0) - \int_{0}^{x} f'(s)ds \quad (3.\ 12)$$

식 (3. 11)과 (3. 12)를 변변 더하면 $f(x) + f(-x) = 2f(0)$이 되며, 이는 $f(x)$가 점 $(0,\ f(0))$에 대한 점대칭함수임을 의미합니다. 이 조건을 이용해보겠습니다. 아래와 같이 정의해봅시다.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = I \quad (3.\ 13)$$

여기서, $x = -t$로 치환하면 아래와 같은 과정을 진행시킬 수 있습니다.

$$\int_{-1}^{1} f(-x)dx = \int_{1}^{-1} f(t)(-dt) = \int_{-1}^{1} f(t)dt = I \quad (3.\ 14)$$

(3. 13)과 (3. 14)를 변변 더하면 다음과 같은 결론을 도출할 수 있습니다.

$$2I = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(-x)dx = \int_{-1}^{1} \{f(x)+f(-x)\}dx = \int_{-1}^{1} 2f(0)dx = 4f(0) \quad (3.\ 15)$$

따라서, $I = 2f(0)$ 입니다. 또한, 문제에서 $I = 0$이라 주어져 있으므로 $f(0) = 0$이 됩니다. $f(1) = f(0) = f(-1)$이 성립하므로 $f(1) = 0$이 됩니다. ■

직접증명법을 활용하여 문제를 풀어보았습니다. 하지만 일부 수리논술 문항은 **직접증명법으로는 증명하기 힘든 경우**가 많습니다. 이 때 **이를 증명하기 위하여 도입된 것이 '간접증명법'**으로, $p \to q$라는 명제를 (3. 1)과 같이 변형하여 증명하는, 즉 '대우명제'를 활용하는 방법인 **'대우명제 증명법'**을 이용하거나, 혹은 결론을 부정하여 기존의 공리 혹은 문제의 조건에 위배되는 조건을 찾아내는 방법인 **귀류법**을 이용하는 것입니다. 대우명제 증명법은 매우 간단하므로 더 이상 설명하지 않겠습니다.

귀류법에 대해서 조금 더 자세히 알아봅시다. 명제 $p \to q$가 참임을 증명하는 대신, 'p는 참이고 q는 거짓이라고 한다면, 모순이 발생한다'는 원리를 이용하는 것이 귀류법입니다. 비슷하게, 명제 p가 참임을 증명하는 대신, '명제 p가 거짓일 때 모순이 발생한다'는 것을 보이기도 합니다. 항상 참인 명제 혹은 공리를 c라고 할 때, $(p \to q) \Leftrightarrow\ \sim(p \to q) \to c \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \to c$ 라는 것이 곧 귀류법인 셈입니다. 이를 진리표를 이용하여 증명해보면 귀류법이 올바른 교과서 증명방법인 것을 알 수 있습니다. 요컨대, 간접증명법이라 함은 직접증명법을 보완하는 연역추론의 일종으로, 고교과정에서 유의미한 간접증명법으로는 다음과 같은 두 가지 방법이 있다는 것입니다.

1) 명제 $p \to q$가 참임을 보이기 위해 $\sim q \to \sim p$임을 보인다. (대우명제 증명법)
2) 명제 p가 참임을 보이기 위해 $\sim p \to c$임을 보인다. (귀류법)

문제를 통해 귀류법을 연습해보도록 하겠습니다.

두 정수 x, y에 대하여 xy가 2의 배수이면 x또는 y가 2의 배수임을 증명하여라. (3. 15)

위의 문제에서 직접증명법을 사용해도 되긴 합니다만, 귀류법을 연습하기 위한 것이 목적이니 귀류법으로 이를 증명해보도로 하겠습니다.

x, y가 모두 2의 배수가 아니므로, $x = 2m+1$, $y = 2n+1$인 정수 m, n이 존재합니다. 따라서, 다음의 일련의 과정이 성립합니다.

$$xy = (2m+1)(2n+1) = 2(2mn+m+n)+1 \quad (3.\ 16)$$

따라서 xy는 홀수입니다. 하지만 문제의 조건에서 xy가 2의 배수 즉, 짝수라고 하였으므로 (3. 16)은 문제의 조건에 모순입니다. 따라서 귀류법에 의하여 x또는 y는 2의 배수가 되어야 합니다. ■

몇 문제를 더 풀어봅시다. '직접 증명법으로 증명하기 곤란한 논제'에 대해서 살펴보도록 합시다.

n^2이 3의 배수일 때, n도 3의 배수임을 증명하시오. (3. 17)

직접증명법으로 증명하기 상당히 까다롭습니다. 심지어 어떤 방법을 써야 할지 조차 모르겠습니다. 이럴 때 '귀류법'은 문제를 해결하기 위한 상당히 강력한 도구가 될 수 있습니다. 위의 논제를 귀류법으로 증명해보겠습니다. (물론, 대우명제 증명법으로 증명하여도 증명이 가능합니다.)

n이 3의 배수가 아니라고 할 때, $n = 3k \pm 1$이므로 $n^2 = (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$ 입니다.
이는, n^2이 3의 배수라는 가정에 모순입니다. 따라서, 귀류법에 의해 n은 3의 배수입니다. ■

$a,\ b,\ c$가 정수일 때, $a^2 + 2b^2 = c^2$이면 b또는 c는 3의 배수임을 보이시오. (3. 18)

위의 문제에 대해서도 마찬가지로 직접증명법을 이용하여 증명하기가 까다롭습니다. 따라서 간접증명법 중 귀류법을 사용하도록 하겠습니다. 일단 해당 명제의 결론을 부정하는 것부터 시작해야 합니다.

b와 c가 모두 3의 배수가 아니라고 할 때 $b = 3m \pm 1,\ c = 3n \pm 1$을 만족하는 정수 $m,\ n$이 존재합니다. 또한, 이를 $a^2 + 2b^2 = c^2$에 대입하면 다음과 같은 일련의 과정이 성립합니다.

$$a^2 = c^2 - 2b^2 = (9n^2 \pm 6n + 1) - 2(9m^2 \pm 6m + 1) = 3(3n^2 \pm 2n - 6m^2 \mp 4m - 1) + 2 \quad (3.\ 19)$$

따라서, a^2이 3의 배수가 아니므로, a또한 3의 배수가 아닙니다. a^2이 3을 인수로 갖지 않기 때문입니다. (이 부분에 대해서는 고등수학 (상) 부분의 약수와 배수 부분을 참고하십시오. 상당히 기본적인 내용입니다.) 즉, 이는 $a = 3k \pm 1$인 정수 k가 존재한다는 것과 동치입니다.

$$a^2 = (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1 \quad (3.\ 20)$$

이 때, (3. 19)와 (3. 20)은 같은 a^2임에도 3으로 나누었을 때 나머지가 같지 않습니다. 이는 모순이며, 따라서 귀류법에 의해 b또는 c가 3의 배수일 수 밖에 없습니다. ■

x^2이 소수 p의 배수이면 x가 p의 배수임을 보이시오. (3. 21)

이 또한 (3. 17)과 같이 직접증명법으로 증명하기 까다로운 논제입니다. 역시, 귀류법을 통해서 증명할 것입니다. 각각의 소수 $p_1,\ p_2,\ \cdots, p_n$에 대하여 $x = p_1 p_2 \cdots p_n$라고 표현할 수 있습니다.

x가 p의 배수가 아닐 때, $[1,\ n]$사이의 임의의 자연수 i에 대하여 $p_i \neq p$입니다.
하지만, $x^2 = (p_1)^2 (p_2)^2 \cdots (p_n)^2$ 이고, $p_i \neq p$이므로 x^2또한 p의 배수가 될 수 없으므로 모순입니다. 따라서, x는 p의 배수가 될 수 밖에 없습니다. ■

마지막으로, 실제 대학 기출 논제를 한 문제만 살펴보고 Chapter 3을 마무리하도록 하겠습니다.

$[0,\ \infty)$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)>0,\ f(x) \geq \int_0^x f(t)dt$를 만족할 때 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않음을 증명하여라. (2009 연세대 특기자 응용)

이 문항 또한 직접증명법으로 증명하기 상당히 까다로운 문항입니다. 역시, '귀류법'을 통해서 해결하는 것이 좋을 것 같습니다.

방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재한다고 합니다. $f(0)>0$이고 $[0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 연속이므로 $f(x)=0$은 최소의 실근을 갖습니다. 이 최소의 실근을 α라고 하면 $f(0)>0$이고 $f(x)$는 연속이므로 $0<x<\alpha$에서 $f(x)>0$입니다.

이를 통해 $0<\int_0^\alpha f(t)dt$이 성립한다는 것을 알 수 있습니다.

$f(\alpha)=0$이므로 $f(\alpha)<\int_0^\alpha f(t)dt$가 성립합니다.

이것은 함수 $f(x)$가 $f(x) \geq \int_0^x f(t)dt$를 만족한다는 사실에 위배됩니다.

따라서, 방정식 $f(x)=0$의 실근은 존재하지 않습니다. ■

Chapter 4. 귀납 추론

우리가 일반적으로 생각하는 많은 것들은 안타깝게도 ‘연역적’이지 않습니다. 그저 여러 사물들을 보고, 이러한 공통점을 통해서 새로운 사실을 추론해내는 방식입니다. 이러한 방식을 우리는 ‘귀납적’이라 부릅니다. 가령, “수만년 전도, 수천년 전도, 1000년 전, 100년 전, 작년에 모두 겨울이 끝나고 봄이 왔기 때문에 올해도 분명 봄은 온다.”는 것이 이러한 사고법입니다.

이러한 사고는 상당히 강력한 것이지만, 사람에 따라서, 증빙사례에 따라서 참/거짓의 ‘농도’가 달라집니다. 어느 정도로 Successful하게 참이냐에 따라 해당 내용에 옳다고 동조하는 사람들의 비중이 달라지는 것입니다. 일반적으로 과학계에서는 현상의 완벽한 증명보다, 근사와 추론, 해석이 중요시되므로 5시그마 이상 (99.9999%의 신뢰도)의 귀납적인 통계에 대해서는 참으로 받아들입니다. 상당히 Successful한 귀납 추론에 대해서만 참으로 받아들이는 셈입니다.

하지만 수학은, 그 어떠한 반례 혹은 ‘반증가능성’도 존재하지 않아야 합니다. 단 0.000001%의 반증가능성이라도 존재하게 된다면 그것은 수학이 아닙니다. 하지만 단순한 귀납 추론은 반증 가능성을 결코 0%로 만드는 것이 불가능하기에 수학자들은 귀납을 수학에 반영하기 위하여 새로운 방법을 적용하게 됩니다. 바로 그것이 우리가 그토록 많이 배워왔던 ‘수학적 귀납법’입니다.

수학적 귀납법

모든 자연수 n에 관한 명제 $p(n)$에 대해서,

1) $n=1$일 때 $p(n)$이 성립한다.
2) $n=k$(k는 자연수)일 때 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 $p(n)$은 성립한다.

위의 두 가지 사실이 참인 경우에 한하여 모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 항상 성립한다.

우리는 이를 증명할 것입니다. Chapter 3에서 배웠던 귀류법을 이용할 것입니다. 즉, 1)과 2)가 모두 성립하였음에도 명제 $p(n)$이 성립하지 않는 경우를 상정하고, 여기서 모순을 이끌어 낼 것입니다.

명제 $p(n)$이 성립하지 않는 모든 n의 집합을 S라 하겠습니다. 이 때, 명제 $p(n)$이 성립하지 않는 경우가 존재함을 가정했으므로 $S \neq \phi$이고 S는 자연수 집합의 부분집합입니다. 혹시, (2. 1)의 ‘최소원의 법칙’을 기억하십니까? 우리는 이 최소원의 법칙을 적용할 것입니다. 집합 S는 최소원의 법칙에 의해 가장 작은 원소 m이 존재합니다. m은 S의 원소이므로, $p(m)$은 성립하지 않습니다. S가 ‘$p(n)$이 성립하지 않는 모든 n의 모임’이기 때문입니다.

한편, 위에 서술된 수학적 귀납법 1)항목에 의해 $1 \notin S$이므로 $m \geq 2$이고, 따라서 $m-1 \geq 1$이 되므로 $m-1$은 자연수입니다. 그런데 S의 가장 작은 원소가 m이므로, $m-1 \notin S$입니다. 그러므로, 집합 S의 정의에 의해 명제 $p(m-1)$은 성립합니다.

여기서, 위에 서술된 수학적 귀납법 2)항목을 생각해봅시다. 명제 $p(m-1)$이 성립하므로, 2)항목의 내용에 의하여 명제 $p(m-1+1)=p(m)$또한 성립합니다. 하지만 이는 앞에서 우리가 이끌어낸 사실

과 모순입니다. 귀류법을 통해 $p(n)$이 성립하지 않는 경우를 가정했기 때문입니다. 따라서, 모든 자연수 n에 대하여 수학적 귀납법은 성립합니다. ■

수학적 귀납법은 일종의 '도미노'임을 기억하셔야 합니다. 일정한 '기준'이 되는 (위의 경우, $n=1$일 때가 기준) 지점을 하나 설정하고, 일정 간격으로 계속 도미노가 쓰러져나가는 이미지를 떠올리시면 수학적 귀납법이 보다 더 직관적으로 다가올 것입니다. 당연한 이야기지만, 굳이 도미노 사이의 간격이 1일 필요는 없습니다. $n=1$일 때를 증명하고, $n=k$일때를 가정했을 때, $n=k+0.5$를 증명한다면 $1,\ 1.5,\ 2,\ \cdots$등에 대하여 수학적 귀납법이 성립할 것입니다. 또한, $n=a$인 임의의 a에 대하여 증명하고, $n=k$일 때를 증명한 후, $n=k+1$, $n=k-1$을 증명하면 모든 정수에 대해서 수학적 귀납법이 성립할 것입니다. $n=a$라는 한 지점을 기준으로 양쪽 방향 모두 도미노가 쓰러지는 형태입니다.

수학적 귀납법은 그리 어려운 개념은 아닙니다. 문제에서 묻고자 하는 것이 '이산적'인 경우라면, 반드시 '수학적 귀납법'을 의심하십시오. 수학적 귀납법을 적용하는 문제일 가능성이 매우 높습니다. 다만, 조심하셔야 할 것은 '귀납적인 논리'와 '연역적인 논리'를 구분하실 필요가 있다는 것입니다.

수열 A_n이 $\{A_n\}=2^{2^n}+1$, (단 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)로 정의되고, $n\neq m$이면 A_n과 A_m은 서로소라고 하자. $A_n-(A_0A_1\cdots A_{n-1})$의 값을 구하시오. (단, $n\geq 1$) (2012 한양대 수시)

가령, 위와 같은 문제에 있어서 다음과 같은 답안을 작성한 학생이 있다고 가정합시다.

$A_n-2=2^{2^n}-1=\left(2^{2^n}-1\right)\left(2^{2^n}+1\right)=A_{n-1}\left(2^{2^n}-1\right)$이므로,귀납추론에 의해 다음 일련의 과정이 성립한다. $A_n-2=A_{n-1}\left(2^{2^{n-1}}-1\right)=A_{n-1}A_{n-2}\left(2^{2^{n-2}}-1\right)=\ \cdots\ =A_{n-1}A_{n-2}\cdots A_1A_0$
따라서, $A_n-(A_0A_1\cdots A_{n-1})=2$이다.

위 학생의 답안은 상당히 큰 문제점을 내포하고 있습니다. 본 챕터에서 설명한 내용을 다시 떠올려봅시다. "단순한 귀납 추론은 반증 가능성을 결코 0%로 만드는 것이 불가능하기에 수학자들은 귀납을 수학에 반영하기 위하여 새로운 방법을 적용하게 됩니다. 바로 그것이 우리가 그토록 많이 배워왔던 '수학적 귀납법'입니다." 라는 내용이 기억나십니까?

위의 학생은 단순한 귀납추론에 그쳐버렸고, 이것을 수학적 귀납법의 영역으로는 이끌어내지 못한 것입니다. 이렇듯 연역추론이 아닌, 귀납추론에 해당되는 부분은 '수학적 귀납법의 원리'를 적용시켜야 할 것입니다. 보다 더 완벽한 답안은 아래와 같을 것입니다.

$A_0A_1\cdots A_{n-1}=2^{2^n}-1$이다. 이를 증명하면 다음과 같다. $n=1$일 때 $A_0=2^{2^0}+1=3$이고 $2^{2^1}-1=3$이므로 위 명제는 성립한다. $n=k$일 때 $A_0A_1\cdots A_{k-1}=2^{2^k}-1$이라 가정하자.
$A_0A_1\cdots A_k=(2^{2^k}-1)(2^{2^k}+1)=(2^{2^k})^2-1=2^{2^{k+1}}-1$이다. 즉, $n=k+1$일 때도 성립한다.
곧, 수학적 귀납법의 원리에 의해 위 명제는 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로
$A_n-(A_0A_1\cdots A_{n-1})=2^{2^n}+1-(2^{2^n}-1)=2$가 성립한다.

Chapter 5. 축소

수리논술 논제의 형태 중 상당수는, 일반적으로 제시문에 주어진 여러 정리들을 활용하여 문제에서 주어진 특수한 상황에 적용시키는 '상황적 축소 구조'입니다. 가령 **제시문에 평균값의 정리가 주어진 상황**을 생각하겠습니다. 그리고 다음과 같은 질문이 논제로 주어졌습니다. (서강대학교 2013 수시)

제시문을 이용하여, 부등식 $\frac{9}{11} < \sqrt{119} - \sqrt{101} < \frac{9}{10}$이 성립함을 증명하시오. (5. 1)

이러한 상황이 바로, '축소'에 해당합니다. 축소 형태의 수리논술 문제에서는 **'도구 활용 능력'을 가장 높게 가치를 두어 평가**합니다. 제시문에서 도구를 주고, 이러한 도구를 적재 적소에 잘 활용할 수 있는지 평가하는 것입니다. 요컨대 '도구를 많이 아는 것'과 '도구를 만들어내는 능력(정리를 증명해내고 새로운 정리를 도출하는 능력)' 등은 이 부류의 문제를 해결하는데 유의미한 도움을 줄 수 없다는 것입니다. 아마도 여러분들이 겪어왔던 수능이라는 시험에 상당히 가까울지도 모르겠습니다. 수능에서의 제시문은 그 형태가 보이지 않을 뿐이지, 결국 잠재된 '교과서에 제시된 정의와 정리들'이기 때문입니다.

축소를 위해서 가장 중요한 것은 **창의력이나 톡톡 튀는 아이디어가 아닌, '필연성'과 '개연성'에 근거**해야 합니다. '문제를 왜 이렇게 풀어나가야 하는가?'에 대한 해답을 스스로 이끌어내야 합니다. 가령, '제시문에 이 도구를 제시하였으므로, 이 도구를 이용하여 푸는 수 밖에 없다'는 것이 문제를 푸는데 있어서 상당히 큰 필연성을 제공해 줄 수 있을 것입니다.

(5.1)의 문제에 대해서는 어떤 필연성이 있을까요. 이 역시 **'제시문'이 필연적 도구**입니다. 제시문에 '평균값의 정리'를 제시하였다는 것은 이를 이용하라는 것입니다. 여기서 상당히 중요한게, 제시문의 내용을 읽어보고 '이미 내가 아는 내용밖에 없잖아?'라는 생각으로 그냥 넘겨버리면 안됩니다. 제시문의 내용은 이미 여러분이 아는 것이더라도, '어떻게 문제를 풀어야 할지, 어떤 정리들과 도구들을 이용해야 할지' 방법론을 제공하는 중요한 힌트이기 때문입니다. 제시문에 대한 확실한 파악 없이 문제에 달려드는 것은 결국 힌트 없이 여러분들의 머리에 떠다닐 수천, 수만가지의 정리들 중 무엇을 이용해야 할지 스스로 정해야 한다는 것과 다를 것 없습니다. 제시문을 읽은 사람이라면 굳이 그 중 무엇을 이용해야 할지 스스로 정할 필요 없이 이미 제시문에서 정해두었기 때문에 문제가 보다 더 쉽게 느껴지겠지요. 별 것 없는 제시문이라도 '넣어둔 이유'를 생각해본다면 반드시 읽을 필요가 있습니다.

(5. 1)을 축소 논제의 입장에서 풀어보겠습니다. 함수 $f(x) = \sqrt{x}$로 설정하고, $f'(x)$를 구하여 '평균값 정리가 사용되는 상황'을 만들어 낼 것입니다. 어떻게든 도구인 '평균값정리'를 활용해야만 하기 때문입니다. 평균값 정리가 어떤 경우에 성립하는지 생각해볼 필요가 있습니다.

함수 $f(x)$는 구간 $[101,\ 119]$에서 연속이고, 또한 구간 $(101,\ 119)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의해 아래 식 (5. 2)를 만족하는 c가 구간 $(101,\ 119)$에 존재함을 알 수 있습니다.

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{f(119) - f(101)}{119 - 101} = \frac{\sqrt{119} - \sqrt{101}}{18} \quad (5.\ 2)$$

정리하면, $\frac{9}{\sqrt{c}} = \sqrt{119} - \sqrt{101}$ 입니다. 이 때 $101 < c < 109$이므로 $\sqrt{101} < \sqrt{c} < \sqrt{119}$이며, 여기에 역수를 취한 후 모든 변에 9를 곱하면 다음의 식을 도출해낼 수 있습니다.

$$\frac{9}{\sqrt{119}} < \frac{9}{\sqrt{c}} < \frac{9}{\sqrt{101}} \quad (5.\ 3)$$

여기서 바로, 다음의 부등식을 이끌어낼 수 있습니다.

$$\frac{9}{11} = \frac{9}{\sqrt{121}} < \frac{9}{\sqrt{119}} < \sqrt{119} - \sqrt{101} < \frac{9}{\sqrt{101}} < \frac{9}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10} \quad (5.\ 4)$$

따라서, 문제에 주어진 식은 성립합니다. ■

'축소 모델의 문제'는 이미 수능에서 상당수 겪어오기도 했고, 제시문에서 주어진 도구를 잘 활용하기만 하면 되는 문항들 뿐입니다. 수학적인 활용 능력만 있다면 그리 어렵지 않게 풀 수 있는 '전형적인' 문제라는 것입니다. 이미 정립된 이야기들을 그저 다시 축소하여 문제에 적용시키면 문제가 풀리는 것이니까요. 하지만, 축소와 반대되는 '확장 모델의 문제'는 상당히 높은 수학적인 센스를 요구합니다. 다음 챕터에서는 이러한 확장 모델의 문제들에 대해서 살펴보겠습니다.

Chapter 6. 확장

확장은 수능이 추구하는 가치와 매우 대립되는 것입니다. 오히려 '수능이라는 시험을 제외한' 교과서의 내용과 보다 더 밀접하게 관련되어있을 것입니다. 가령, 어떠한 정리를 통해 다른 여러 정리들을 이끌어내며 '사고의 확장'을 하거나, 한 정리가 성립하는 정의역의 범위를 확장시키는 것이 있을 것입니다. 요컨대, 정의역의 범위를 확장시킨다는 것은 한 정리가 자연수에서 성립함이 증명되었을 때, 이를 정수의 범위로 확장시키고, 유리수의 범위, 실수의 범위로 점차적으로 확장시켜나가는 것입니다. 혹은, 변수의 개수를 늘려서 차원을 늘려나가기도 하고, 이산적인 개념의 정리를 연속적인 개념의 정리로 확장시키기도 합니다. 이는 모두 '사고의 확장' 혹은 '적용 범위의 확장'과 관련이 있습니다.

축소 모델의 문항들이 '도구 활용 능력 평가'를 위해 만들어진 문제들이라면, 확장 모델의 문항들은 '수학 전반에 대한 이해 평가'를 위하여 출제된 문제들이 대부분입니다. 확장 모델의 문항들은 누가 더 근본적으로 수학적으로 사고하는가, 보다 더 체계적이고 논리적인 사고를 하는가, 기존의 정리들을 이용하여 새로운 정리를 도출할 수 있는가, 혹은 '수험이 아닌, 교과서 자체에 얼마나 더 다가가 있는가?' 등의 내용을 평가하기에 상당히 적합합니다.

보다 구체적인 예시를 통해 살펴봅시다. '삼각부등식'에 대해서 확장의 개념을 적용시켜 보겠습니다.

삼각부등식 : 실수 x, y에 대하여 $|x+y| \leq |x|+|y|$가 항상 성립한다. (6. 1)

위의 삼각부등식을 증명하는 방법은 다양합니다. 삼각형 모양을 좌표평면에 그리고 각각의 변을 벡터로 생각하여 풀 수도 있고, 대수적인 방법으로 풀어낼 수도 있습니다. 우리는 대수적인 방법으로 증명하도록 하겠습니다.

삼각부등식의 양 변을 제곱한 후, 한 쪽으로 모두 이항한 형태를 생각해봅시다. 우리는 이를 역추론할 것입니다. 임의의 수식 $|x+y|^2-(|x|+|y|)^2$의 부호를 통해, 해당 부등식이 올바른지, 혹은 부등호의 방향이 반대가 되어야 하는지 알아볼 것입니다.

$$|x+y|^2-(|x|+|y|)^2=(x+y)^2-(x^2+2|x||y|+y^2)=2(xy-|xy|)\leq 0 \quad (6.\ 2)$$

(6. 2) (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)에서, 다음의 부등식을 도출해낼 수 있습니다.

$$\sqrt{|x+y|^2} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2} \quad (6.\ 3)$$

(6. 3)의 부등식은 곧 다음 부등식과 동치입니다.

$$|x+y| \leq |x|+|y| \quad (6.\ 4)$$

따라서, 실수 x, y에 대하여 삼각부등식이 증명되었습니다.

이제, 삼각부등식을 3개의 항으로 '확장'시킬 것입니다. 이는 별로 어렵지 않습니다. (6. 1)에 제시된 기존 삼각부등식에서 x대신 x_1+x_2를, y대신 x_3를 대입하여 두 번의 삼각부등식을 거치면 3개의 항에 대한 삼각부등식이 유도됩니다.

$$|(x_1+x_2)+x_3| \le |x_1+x_2|+|x_3| \le |x_1|+|x_2|+|x_2| \quad (6.\ 5)$$

항이 2개에서 3개로 늘어났습니다. 이제 어떻게 확장시킬까요. 항이 n개인, 즉 모든 자연수 n에 대하여 항이 n개인 삼각부등식으로 만들어봅시다. 무언가 생각나야만 합니다. 항이 n개. 이산적. 도미노. Chapter 4에서 배웠던 수학적 귀납법을 활용해야 할 때입니다. 아래 부등식을 증명합시다.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad (6.\ 6)$$

수학적 귀납법을 사용하겠습니다. 일단 $n=1$일 때에는 자명하게 성립합니다. $n=p$일 때 성립한다고 가정합니다. 즉, 다음의 식이 성립한다고 가정하는 것입니다.

$$\left|\sum_{k=1}^{p} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{p} |x_k| \quad (6.\ 7)$$

이제, (6. 7)의 식을 이용하여 $n=p+1$일 때의 (6. 6)식을 유도할 것입니다.

$$\left|\sum_{k=1}^{p+1} x_k\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right)+x_{p+1}\right| \le \left|\sum_{k=1}^{p} x_k\right|+|x_{p+1}| \le \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|\right)+|x_{p+1}| = \sum_{k=1}^{p+1} |x_k| \quad (6.\ 8)$$

(6. 8)의 과정을 통해, $n=p$가 성립할 때 $n=p+1$ 또한 성립함을 보였습니다. 따라서, 수학적 귀납법의 원리에 의해 항이 n개인 삼각부등식은 성립합니다.

이제 더 확장을 시도해봅시다. 무엇을, 어떻게 확장시켜야 할까요. 이미 항이 n개인 삼각부등식으로 확장에 성공하였으니, 이산적인 경우에 대해 성립하는 이 식을 연속적인 수식으로 바꾸어 보겠습니다. '이산확률분포'와 '연속확률분포'의 차이점이 무엇인지 기억하십니까? n개의 상황에 대해서 성립하던 내용을, 연속확률분포에서는 적분을 이용하여 나타내었습니다. 즉, 우리는 위의 시그마 식을 n을 무한대로 확장하고 조금 조작하여 적분식 형태로 나타낼 것입니다.

전구간에서 연속함수인 $f(x_k)$에 대하여, $x_k \in [a,\ b]$이면 $f(x_k)$는 실수이므로 위의 부등식 (6. 6)에 x_k대신 $f(x_k)$를 대입하여도 성립합니다.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \quad (6.\ 9)$$

이 때, $\Delta x \ge 0$ $(b>a)$ 이므로 (6. 9)의 양 변에 Δx를 곱하겠습니다.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|\Delta x \quad (6.\ 10)$$

위의 부등식 (6. 10)의 양 변에 n을 무한대로 발산시키는 극한을 취합니다.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\right| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|\Delta x \quad (6.\ 11)$$

정적분과 무한급수와의 관계에 의하여, 다음 부등식이 성립합니다.

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (6.\ 12)$$

이렇게, 단순히 두 변수에 대한 삼각부등식이 변수가 n개가 되고, 이산적이었던 부등식이 연속적인 부등식으로 점차 확장되어나가는 과정을 보았습니다. 이번에는 실제로 대학에 기출된 문제에 대하여 '확장'개념을 적용하겠습니다.

폐구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 함수 $f(x),\ g(x)$에 대하여 다음을 증명하여라.

$$\left\{\int_0^1 f(x)g(x)dx\right\}^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \quad \text{(2011 서울대 특기자) (6. 13)}$$

위에서 주어진 형태의 적분식이 상당히 익숙합니다. 분명 교과서에서 본 것 같습니다. 고등수학 교과서에서 본 적이 있습니다. 바로, '코시 슈바르츠 부등식'의 확장 형태입니다. 교과서에 나온 코시 슈바르츠 부등식은 매우 단순한 형태입니다.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2 \quad (6.\ 14)$$

(6. 14)에 대한 증명 또한 어렵지 않습니다. 삼각부등식에서 사용했던 방법을 매우 유사하게 적용할 것입니다. 다음의 일련의 과정이 성립합니다.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 = a^2d^2-2abcd+b^2c^2 = (ad-bc)^2 \geq 0 \quad (6.\ 15)$$

이는 곧, 이항과정을 거치면 (6. 14)의 부등식과 동일한 형태가 됩니다. 등호는 $ad=bc$일 때 성립합니다. 이렇게 간단한 과정을 통해 (6. 14)의 코시 슈바르츠 부등식을 증명하였습니다. 이 내용이 바로 교과서에 제시된 코시슈바르츠 부등식에 대한 증명 방법입니다.

하지만, 언제까지고 이렇게 항을 모두 전개하면서 증명해야 하는 것일까요? 확장을 보다 편하게 하기 위해 새로운 증명방법을 도입할 필요가 있습니다. 이 새로운 증명방법은 변수가 총 6개인 코시 슈바르츠 부등식을 통해 알아봅시다.

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2 \quad (6.\ 16)$$

(6. 16)을 증명하기 위해서 다음 부등식을 생각합시다. 모든 t에 대하여 아래 부등식은 성립합니다.

$$(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2 \geq 0 \quad (6.\ 17)$$

좌변을 t에 대한 이차방정식으로 정리하면 아래와 같습니다.

$$(a^2+b^2+c^2)t^2-2(ax+by+cz)t+x^2+y^2+z^2 \geq 0 \quad (6.\ 18)$$

최고차항의 계수인 $(a^2+b^2+c^2)=A$라 할 때, A의 값에 따라 두 경우로 나눌 수 있습니다. 우선, $A=0$일 때, 부등식 $a,\ b,\ c$가 모두 실수이므로 $a=b=c=0$일 수 밖에 없으며 자명하게 위의 부등식 (6. 16)은 성립합니다.

$A \neq 0$일 때, $a^2+b^2+c^2>0$이므로 (6. 18)의 부등식이 성립하기 위한 조건은 아래와 같습니다.

$$D/4=(ax+by+cz)^2-(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \leq 0 \quad (6.\ 19)$$

위의 부등식을 이항하면, 부등식 (6. 16)을 유도할 수 있습니다.

이제, 항이 n개인 경우로 확장을 시도합시다. 삼각부등식의 경우보다는 상황이 나은 것이, 이번에는 굳이 수학적 귀납법을 쓸 필요는 없어 보입니다. 항이 n개라 하더라도, t에 대한 이차방정식의 형태로 증명하는 방식은 여전히 성립하므로 이 방법을 그대로 적용할 수 있을 것입니다. 물론, 수학적 귀납법을 사용하여 증명하여도 하등 문제가 될 것이 없습니다. 약간 더 복잡할 뿐입니다. 하지만 본 단원은 '확장의 개념'을 배우는 것이지, 수학적 귀납법을 배우는 단원이 아니므로 판별식을 이용한 증명으로 방향을 설정하겠습니다.

우리는 이제 다음과 같은 부등식을 증명하여야 합니다.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 \quad (6.\ 20)$$

수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 대하여 $k \in [1,\ n]$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$(a_k-b_k t)^2 = a_k - 2a_k b_k t + (b_k)^2 t^2 \geq 0 \quad (6.\ 21)$$

양 변에 시그마를 취하면, 다음 부등식이 성립합니다.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k-b_k t)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k t + \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 t^2 \quad (6.\ 22)$$

이는 t에 대한 이차방정식 형태로, 최고차항의 계수를 다음과 같이 정의합니다.

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2 = A \quad (6.\ 23)$$

$A=0$인 경우, $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$이어야 하므로, 해당 부등식이 $0=0$꼴이 되어 성립합니다.
$A \neq 0$인 경우, 아래의 과정을 만족합니다.

$$\frac{D}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}(a_k)^2 \sum_{k=1}^{n}(b_k)^2 \leq 0 \quad (6.\ 24)$$

(6. 24)에서 적당히 항을 이항하면 (6. 20)의 부등식을 유도할 수 있습니다.

이제, 이산적이었던 코시 슈바르츠 부등식을 연속적인 형태의 적분식으로 확장할 시간입니다. 이것 또한 두 가지 방법이 있습니다. 이번에는 직접 문제에 나온 부분이니 두 방법 모두 시도하겠습니다. 우선, t에 대한 이차방정식 형태로 나타내는 방법을 이용하겠습니다.

$$\left\{\int_0^1 f(x)g(x)dx\right\}^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \quad (6.\ 25)$$

위의 부등식을 증명해야 합니다. 일단, 아래 부등식이 성립함을 알 수 있습니다.

$$\int_a^b \{f(x) - tg(x)\}^2 dx \geq 0 \quad (6.\ 26)$$

이를 t에 대한 이차방정식 형태로 정리하면 아래와 같습니다.

$$t^2 \int_a^b \{g(x)\}^2 dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \geq 0 \quad (6.\ 27)$$

(6. 27)의 부등식에서, 최고차항의 계수를 다음과 같이 정의합니다.

$$\int_a^b \{g(x)\}^2 dx = A \quad (6.\ 28)$$

$A=0$일 때 $[a,\ b]$에서 $g(x)=0$이 되므로 (6. 25)의 부등식은 항상 성립합니다.
$A \neq 0$일 때 아래의 부등식이 성립합니다.

$$\frac{D}{4} = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right) \leq 0 \quad (6.\ 29)$$

따라서, (6. 25)의 부등식은 성립합니다.

이번에는 보다 더 정석적인 방법으로 접근하겠습니다. 삼각부등식에서 증명했던 것과 같이, 무한급수와 정적분의 관계를 이용할 것입니다. 식 (6. 20)에서 a_k대신 $f(x_k)$를, b_k대신 $g(x_k)$를 대입하면 아래와 같은 부등식을 이끌어 낼 수 있습니다.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)\}^2 \sum_{k=1}^{n}\{g(x_k)\}^2 \quad (6.\ 30)$$

$b > a$이므로 $\Delta x > 0$이다. $(\Delta x)^2$을 부등식의 양 변에 곱하겠습니다.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)\Delta x\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)\}^2\Delta x \sum_{k=1}^{n}\{g(x_k)\}^2\Delta x \quad (6.\ 31)$$

양변에 n을 양의 무한대로 발산시키는 극한을 취하고, 정적분과 무한급수와의 관계를 이용하면 위에 주어진 식 (6. 25)를 유도할 수 있습니다.

이와 같이 수리논술에서 어렵다고 느껴지는 상당수의 문항들은 '확장 모델의 문항'과 연관이 있으며, 이는 기존의 수능 체제 하에서 상당히 소외되어왔던 형태의 평가항목이기 때문이다. 이러한 확장 모델의 다른 예시로는, '사고의 확장'이 있습니다. 증명된 한 형태의 식을 동치변형하거나 다른 정리와 결합하여, 새로운 형태의 결과물을 만들어 내는 것입니다.

대표적으로, 최대 최소 정리 → 중간값의 정리 → 롤의 정리 → 평균값의 정리 → 코시의 정리 → 약식 로피탈의 정리로 이어지는 일련의 증명 과정이 이러한 '사고의 확장' 모델에 해당한다고 할 수 있을 것입니다. 보다 더 구체적인 확장의 내용을 살펴보도록 하겠습니다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ **임을 증명하여라.** (6. 32)

위의 극한은 각종 초월함수의 그래프를 그릴 때, 점근선을 찾기 위하여 많이 사용되는 극한입니다. 지수함수와 다항함수의 '세기'라는 추상적인 개념을 도입하여 설명하기도 하고, 바로 로피탈정리를 이용하여 증명하기도 하지만 우리는 일단 중등교육과정 내에서 최대한 논리적으로 이를 증명하겠습니다.

$$0 < \frac{x}{e^x} < \frac{x}{f(x)} \quad (6.\ 33)$$

(6. 32)를 증명하기 위해서는, (6. 33)을 만족시키는 적당한 다항함수 $f(x)$를 찾아내어야 합니다. 그 다항함수 $f(x)$에 대하여 샌드위치 정리를 사용할 것입니다. (6. 32)의 극한값을 만족하기 위해서는, 일단 다항함수 $f(x)$가 2차 이상의 다항함수가 될 수 밖에 없습니다. 즉, 우리는 $f(x)$를 결정하기 위해서 '임의의 이차함수'를 설정하는 것이 가장 이상적임을 알 수 있습니다. (실제로는 2차 이상의 다른 다항함수를 사용하여도 좋습니다.) 위의 부등식을 만족하기 위해서는 우선 $e^x > f(x)$이어야 하므로, $e^x > kx^2$을 만족하는 k를 찾아내어야 합니다. $g(x) = e^x - kx^2$이라 하면 $g(0) = 1$이고 이는 0보다

큰 값입니다. 또한 $g'(x)=e^x-2kx$이므로 $k=\frac{1}{2}$를 선택하면 $x>0$일 때 $g'(x)>0$임을 알 수 있습니다. 요컨대, 다음과 같이 정리할 수 있다는 것입니다.

$g(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$일 때

1) $g(0)=1>0$

2) $x>0$에서 $g'(x)=e^x-x>0$

위의 내용이 성립하므로 $x>0$에서 $g(x)\geq 1>0$이 성립한다고 할 수 있습니다. 따라서, 다음 부등식이 성립합니다.

$$e^x>\frac{1}{2}x^2 \quad (6.\ 34)$$

(6. 34)의 부등식을 (6. 33)에 대입하면 아래와 같습니다.

$$0<\frac{x}{e^x}<\frac{x}{\frac{1}{2}x^x}=\frac{2}{x} \quad (6.\ 35)$$

샌드위치 정리를 (6. 35)에 적용하면, (6. 32)의 내용이 증명됩니다. 여기에서 논의를 멈추지 않고 점차 더 '확장'시켜 나갈 것입니다. 아래와 같은 보다 더 확장된 형태의 논제가 제시되었습니다.

임의의 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$ 임을 증명하여라. (6. 36)

어떠한 방법으로 이를 증명할 수 있을지 생각해봅시다. 우선 $f(x)$를 구체적인 수식으로 나타내야 함은 자명한 사실인 것 같습니다. 증명을 위하여 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$로 설정하고, 이와 같은 $f(x)$에 대하여 다음과 같은 식이 성립합니다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{e^x}=\lim_{x\to\infty}a_n\frac{x^n}{e^x}+a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{e^x}+\cdots+a_1\frac{x}{e^x}+a_0\frac{1}{e^x} \quad (6.\ 37)$$

위의 식에서, 자연수 n에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ 임을 보이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$을 보이기에 충분하다는 것을 알 수 있습니다. 해당 과정에 맞게 증명을 진행하기 위하여 다음과 같이 식을 변형하겠습니다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left\{\frac{\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}}\right\}^n\times n^n\right) \quad (6.\ 38)$$

식 (6. 38)에서 $\dfrac{x}{n}$을 t로 치환하면 극한값은 0으로 수렴함을 알 수 있습니다. 따라서 (6. 36)의 내용이 증명되었습니다. 그렇다면, 이를 응용하여 보다 더 확장된 형태의 논제를 살펴보겠습니다.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ **의 극한값을 구하여라.** (6. 39)

수학적 센스가 있는 분들이라면 금방 눈치채실 수 있었겠지만, 위의 극한값을 구해내는 것은 썩 어렵지 않습니다. $\ln x = t$로 치환하면, $x = e^t$이고 x가 양의 무한대로 발산할 때 t또한 양의 무한대로 발산하므로 식 (6. 32)의 내용을 이용하면 다음과 같은 결과를 이끌어낼 수 있습니다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} = 0 \quad (6.\ 40)$$

다른 문제로도 확장이 가능합니다. 아래 문제를 봅시다.

$\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$의 극한값을 구하여라. (6. 41)

이 또한 어려운 문제는 아닙니다. $x = \dfrac{1}{t}$로 치환하면 x가 $+0$으로 수렴할 때 t는 양의 무한대로 발산하므로, (6. 39)를 이용하면 다음이 성립합니다.

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{t\to\infty} -\frac{\ln t}{t} = 0 \quad (6.\ 42)$$

또 다시 확장을 시도하겠습니다. 풀이방법이 약간 특이한 문제입니다.

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ **의 극한값을 구하여라.** (6. 43)

혹시, (6. 43)의 극한값을 e라고 생각하신 분이 계시다면 매우 반성하시기 바랍니다. x가 0으로 수렴하는 극한일 때, 극한값이 e가 됩니다. x가 무한대로 발산하는 경우에 대해서는 조사한 적이 없을 것입니다. 약간의 발상적인 방법을 도입하겠습니다.

일단, 구하고자 하는 극한값을 아래와 같이 정의합니다.

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (6.\ 44)$$

이제, $\lim\limits_{x\to\infty} y$를 구하는 문제로 변형할 수 있습니다. 이를 직접 계산하기 어려우므로 로그를 취하여

$\lim_{x\to\infty}\ln y$를 계산해낸다면 구하는 극한은 $\lim_{x\to\infty}\ln y = e^a$가 될 것입니다. (이는 $y=\ln x$의 그래프가 전단사함수이기고 역함수가 존재하기에 가능합니다.) (6. 39)를 이용하면, 다음의 과정이 성립합니다.

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)}\times\frac{1+x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln t}{t}\times\frac{1+x}{x} = 0\times 1 = 0 \quad (6.\ 45)$$

마지막으로, 한 번만 더 확장을 시도하겠습니다.

$\lim_{x\to+0} x^x$ **의 극한값을 구하여라.** (6. 46)

이 또한 (6. 43)을 풀 때와 마찬가지로 로그를 취한 상태에서의 극한을 구하는 방식으로 쉽게 풀 수 있습니다. 아래와 같은 일련의 과정이 성립합니다.

$$\lim_{x\to+0}(\ln x^x) = \lim_{x\to+0} x\ln x = 0 \quad (6.\ 47)$$

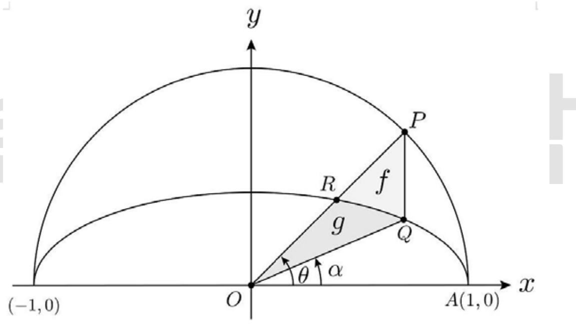
따라서, (6. 46)의 극한값은 e^0으로, 1이 됩니다.

Chapter 7. 계단식 구조

이번에는 수리논술에서 상당히 특이한 부분을 논하게 될 것입니다. 대부분의 수리논술은 '계단식 구조'를 가지고 있습니다. 즉, 1번 논제에서 유도 혹은 증명하였던 공식이 2번 논제를 증명하는 것에 사용되고, 3번에서는 1번과 2번에서 유도한 공식 혹은 그에 준하는 사고방식을 통하여 증명해내는 것입니다. 이러한 계단식 구조는 우리에게 수리논술 논제를 각각 개별적으로 보지 말고, 논제들의 흐름을 통하여 전체적인 그림을 그릴 것을 요구하고 있습니다. 문제를 풀다 추가적인 조건이 필요한 시점에, 이미 전 문항에서 증명했거나 이끌어내었던 조건을 활용하여 '계단을 올라가듯이' 논제를 따라 풀어 나가는 것입니다. 문제를 살펴봅시다.

제시문을 읽고 다음 물음에 답하시오. (2011 연세대 수시 논술)

(가) 단위원 $x^2+y^2=1$위를 점 $A(1,\ 0)$에서 출발하여 시계 반대 방향으로 움직이는 점 P의 시간 t에서의 좌표를 $(x(t),\ y(t))$라고 하자. 타원 $x^2+k^2y^2=1$ (단, $k>1$인 실수)은 두 점 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$에서 단위원에 접한다. 점 P에서 x축으로 내린 수선이 타원과 처음 만나는 점을 Q라고 하자.



(나) 점 P와 원점 O를 이은 선분이 타원과 만나는 점을 R이라고 하자. 선분 OA와 선분 OP가 이루는 각을 θ, 선분 OA와 선분 OQ가 이루는 각을 α라고 하자. 선분 PQ, 선분 PR과 타원의 호 RQ로 둘러싸인 도형 PQR의 넓이를 f, 선분 OQ, 선분 OR과 타원의 호 RQ로 둘러싸인 도형 OQR의 넓이를 g라고 하자.

[1-1] 점 $P(x(t),\ y(t))$가 단위원 위의 점 $A(1,\ 0)$에서 출발하여 시계 반대 방향으로 시각 t에 따라 일정한 속력으로 돌고 있다. 선분 OA, 선분 OQ와 타원의 호 AQ로 둘러싸인 도형 OAQ의 넓이를 $S(t)$라고 하자. $S(t)$의 시간에 대한 변화율 $\dfrac{dS}{dt}$가 상수임을 논리적으로 설명하시오.

[1-2] 각 α의 시간에 대한 변화율 $\dfrac{d\alpha}{dt}$가 각 θ의 시간에 대한 변화율 $\dfrac{d\theta}{dt}$와 같아지는 θ가 구간 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$에서 적어도 하나는 존재함을 논하고, 이 때 α와 θ사이의 관계식을 구하시오. 또한, 극한값 $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha}$를 구하시오. (단 $\alpha(t)$, $\theta(t)$는 미분가능한 함수이고 $\theta'(t) \ne 0$, $\alpha'(t) \ne 0$이다.)

[1-3] 극한값 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{f}{g}$를 구하시오.

단순히 보기만 해도, 상당히 어려운 문제인 것 같습니다. 간단한 해설을 아래에 참조합니다. 본 해설에 대한 구체적인 설명은 http://kockoc.com/column/382540 게시물을 참조하십시오. (반드시 참고하셨으면 좋겠습니다.)

〈2011 연세대 수시 논술 해설〉

[1-1] 시각 t에서 도형 OAP(부채꼴)의 넓이를 $T(t)$, 호 AP의 길이를 $l(t)$, $\angle AOP = \theta(t)$라 정의합시다. 주어진 조건에 의해 $\frac{dl}{dt}$는 일정하고 $l(t) = \theta(t)$이므로 $\frac{d\theta}{dt}$는 상수입니다.

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때 다음이 성립합니다.

$$T(t) = \frac{1}{2}\theta(t) = \int_0^{x(t)} \tan\theta(t) x\,dx + \int_{x(t)}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \quad (7.\ 1)$$

점 Q의 좌표는 $Q\left(x(t),\ \frac{y(t)}{k}\right)$이므로

$$S(t) = \int_0^{x(t)} \tan\theta(t)\frac{x}{k}dx + \int_{x(t)}^1 \frac{1}{k}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{T(t)}{k} = \frac{1}{2k}\theta(t) \quad (7.\ 2)$$

따라서 $S'(t) = \frac{1}{2k}\theta'(t)$이고 $\frac{d\theta}{dt}$는 상수이므로 $\frac{dS}{dt}$는 상수입니다.

$\theta \ge \frac{\pi}{2}$일 때도 같은 원리에 의해 $\frac{dS}{dt}$는 상수입니다.

[1-2] $f(t) = \theta(t) - \alpha(t)$라 정의합니다. 문제의 조건으로부터 θ는 t에 관한 증가함수이므로 $\theta(0) = 0$이고, $\theta(T) = \frac{\pi}{2}(T > 0)$인 T가 존재합니다.

$t = 0$일 때 $\theta(0) = \alpha(0) = 0$ 이고, $t = T$일 때 $\theta(T) = \alpha(T) = \frac{\pi}{2}$이므로 $f(0) = 0$, $f(T) = 0$입니다. 이 때, $\alpha(t)$, $\theta(t)$는 미분 가능한 함수이므로 $f(t)$는 $[0,\ T]$에서 연속, $(0,\ T)$에서 미분 가능합니다. 따라서 평균값의 정리 (또는 롤의 정리)에 의해 $f'(t_0) = 0$인 $t_0 \in (0,\ T)$가 존재합니다. 즉, $\theta'(t_0) = \alpha'(t_0)$인 t_0가 구간 $[0,\ T]$에서 존재하므로 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}$인 θ가 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 적어도 하나 존재하게 됩니다.

$Q\left(x(t),\ \dfrac{y(t)}{k}\right)$이므로 삼각비의 정의에 의해 다음이 성립합니다.

$$\tan\theta = \frac{y(t)}{x(t)} = k\frac{\frac{1}{k}y(t)}{x(t)} = k\tan\alpha \quad (7.\ 3)$$

$\theta \to \frac{\pi}{2} - 0$이면 $\alpha \to \frac{\pi}{2} - 0$이므로 식 (7. 3) 과 삼각함수의 극한 $\lim_{h \to 0}\frac{\tan h}{h} = 1$을 이용하겠습니다.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{\tan\alpha}{\tan\theta} = \frac{1}{k}$$

(7.4)

[1-3] 계단식 구조를 활용해야 하는 부분입니다. 점 R에서 y축에 평행한 직선을 작도하고, 그 직선이 단위원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 P'이라 하자. 그리고 $\angle P'OA$의 크기를 β라고 하겠습니다. 이때, 논제 [1-1]에서 구한 $S(t)$를 이용하면 다음이 성립합니다.

$$g = \frac{\beta}{2k} - \frac{\theta}{2k} \quad (7.\ 5)$$

이미 논제 [1-1]에서 논한 결과를 논제 [1-3]에서 재활용하고, 논제 [1-1]에서 풀었던 과정이기에 "논제 [1-3]또한 이와 같은 방법으로 푸는 것이 옳다"는 일종의 필연성을 획득할 수 있는 것입니다. 이제 $g+f$를 구할 차례입니다. 아래와 같습니다.

$$g+f = \frac{1}{2}\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{k}\sin\theta\right) \quad (7.\ 6)$$

따라서 다음의 일련의 과정이 모두 성립합니다.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{f+g}{g} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cos\theta\sin\theta}{\frac{\beta-\theta}{2k}} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{(k-1)\cos\theta\sin\theta}{\beta-\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{(k-1)\cos\theta\sin\theta}{\beta-\theta}\frac{\tan(\beta-\theta)}{\frac{\tan\beta-\tan\theta}{1+\tan\beta\tan\theta}}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{(k-1)\cos\theta\sin\theta(1+k\tan^2\theta)}{(k-1)\tan\theta}\frac{\tan(\beta-\theta)}{\beta-\theta} \quad (\because \tan\beta = k\tan\theta)$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\cos\theta\sin\theta\left(\frac{1}{\tan\theta}+k\tan\theta\right)\frac{\tan(\beta-\theta)}{\beta-\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}(\cos^2\theta + k\sin^2\theta)\frac{\tan(\beta-\theta)}{\beta-\theta} \quad (7.\ 7)$$

$\theta \to \frac{\pi}{2} - 0$일 때 $\beta - \theta \to 0$이므로 위 극한값은 k입니다. 즉 다음 식이 성립합니다.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{f+g}{g} = k \quad (7.\ 8)$$

따라서 다음 결과가 성립합니다.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{f}{g} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2} - 0} \left(\frac{f+g}{g} - 1 \right) = k - 1 \quad (7.\ 9)$$

■

위에서 서술한 바와 같이 이전의 소논제에서 필연성을 부여받거나, 현재 풀고 있는 소논제를 증명하기 위하여 이전 소논제의 결과를 차용하는 방식의 문제 자체의 유기적인 결합을 계단식 구조라 하며 이는 수리논술에 있어서 풀이의 도구로 활용할 수 있습니다.

문제를 풀다 무언가 조건이 부족하거나, 어떻게 풀어야 할지 보이질 않는다면 이전에 풀었던 소논제에서 답을 얻으십시오. 그것이 바로 문제와 유기적으로 소통하는 방법이며, 계단식 구조를 가장 잘 활용하는 방법이 될 것입니다. 아마 이 교재를 보는 동안 여러분들은 자신이 지원하고자 하는 대학의 수리논술 논제를 이미 프린트해서 보고 계실 것입니다. 혹은, 옆에 두고 아직 보지 않으셨을 수도 있을 것입니다. 이 교재를 보고 난 이후, 반드시 지원 대학의 기출문제를 '유기적으로' 살펴보십시오. 계단식 구조를 살펴보고, 각 문제가 확장형태의 논제인지, 축소형태의 논제인지, 직접증명법을 사용해야 하는지, 간접증명법인 귀류법을 사용해야 하는지 파악할 필요가 있습니다.

이렇게 유기적으로 살아숨쉬는 풀이를 통해서만이 수리논술에 있어서 가장 완벽한 풀이라 할 수 있을 것입니다. 출제자가 여러분들에게 묻고자 하는 것이 무엇인지 끊임없이 자문하십시오. 그리고 본 교재에 서술된 방법을 토대로 구조를 눈에 익히십시오. 나무에만 집착하지 마시고, 숲을 보시고, 나무와 나무 사이의 관계를 보십시오. 그런 방법이 점차 모여, 여러분들을 합격의 길로 인도할 것입니다.

두 문제만 더 첨부하겠습니다. 이 문항 또한 '계단식 구조'를 형성한다는 것을 잊지 마십시오.

다음 물음에 답하여라.

1) 모든 자연수 k에 대하여 부등식 $\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$이 성립함을 보여라.

2) $m > n$인 모든 자연수 m, n에 대하여 부등식

$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \ln \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$를 증명하라.

대략적인 해설의 흐름만을 기술하겠습니다.

1) 함수 $f(x)$를 아래와 같이 정의합니다.

$$f(x)=\frac{1-x}{k+x}=-1+\frac{k+1}{k+x},\ f'(1)=-\frac{1}{k+1}\ (\text{단, } k\text{는 자연수})\ (7.\ 10)$$

$f(x)$는 분수함수 꼴이며 아래로 볼록한 함수입니다.

$$(1,\ 0)\text{에서 } f(x)\text{에 그은 접선의 } y\text{절편 : } \frac{1}{k+1}\ (7.\ 11)$$

위 조건에 대한 그래프를 그려서 넓이관계를 비교하면 다음의 부등식을 이끌어낼 수 있습니다.

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}\ (7.\ 12)$$

2) 식이 굉장히 복잡합니다. 아마 출제자는 분명 '이전 소문항에서 풀이의 방향을 찾을 것'을 요구할 것입니다. 필연적으로 문제를 풀 도구가 '계단식 구조'이외에는 잘 보이질 않습니다. 일단, (7. 12)에 나온 적분식의 값을 직접 계산해보도록 하겠습니다.

$$\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=(k+1)\ln\frac{k+1}{k}-1\ (7.\ 13)$$

1)의 식에 의해 다음의 부등식이 성립합니다.

$$\frac{1}{2(k+2)}<\frac{1}{2(k+1)}<(k+1)\ln\frac{k+1}{k}-1<\frac{1}{2k}\ (7.\ 14)$$

이를 변형하면 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{2(k+2)(k+1)}<\ln\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)}\ (7.\ 15)$$

이를 다시 한 번 더 변형합니다.

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right\}<\ln\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right\}\ (7.\ 16)$$

$m>n$이므로, k에 n부터 $m-1$을 대입한 모든 식들을 모두 축차대입법으로 더하면, 최종적으로 다음의 식을 유도할 수 있습니다.

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \ln\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn} \quad (7.\ 17)$$

■

다음 문항을 풀어보도록 하겠습니다. 이 문항 역시 '계단식 구조'임을 기억하십시오.

다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

n, N은 자연수이고, 함수 $f(x)$가 $f(x)=f(x+k)$ (단, k는 양수)를 만족한다.

[1-1] $T_n = \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x}f(x)dx$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} T_n$으로 정의할 때, T_n, S_N을 T_1으로 나타내어라. [40점]

[1-2] $f(x) \geq 0$일 때, k이상의 실수 z에 대하여 $S_N \leq \int_0^z e^{-x}f(x)dx < S_{N+1}$이 성립하도록 하는 N을 k와 z를 이용하여 나타내어라. [25점]

[1-3] [1-2]에서의 극한값 $\lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-x}f(x)dx$가 존재함을 보이고, 이 극한값을 T_1으로 나타내어라. [10점]

[1-4] $h(x) = e^{-x}|\cos\pi x|$일 때, $y=h(x)$, x축, y축, 직선 $x=z$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $V(z)$라 하자. 극한값 $\lim_{z\to\infty}V(z)$를 구하여라. [25점]

이 문항 역시 풀이의 흐름 위주로 간략히 설명하겠습니다. 1번부터 4번까지 문항간의 유기적은 연관성이 돋보이는 문제였습니다.

[1-1] $f(x)=f(x+k)$이므로, $e^{-x}f(x) = e^{-(x+k)}f(x+k)e^k$

$$T_n = \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x}f(x)dx = \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-(x+k)}f(x+k)e^k dx = e^k\int_{k(n-1)}^{kn} e^{-(x+k)}f(x+k)dx$$

$$= e^k\int_{kn}^{k(n+1)} e^{-x}f(x)dx = e^k T_{n+1} \qquad \therefore T_{n+1} = \frac{1}{e^k}T_n$$

즉, 수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 T_1이고 공비가 $\frac{1}{e^k}$인 등비수열입니다.

$$\therefore T_n = T_1\left(\frac{1}{e^k}\right)^{n-1},\ S_N = \sum_{n=1}^{N} T_n = \frac{T_1\left(1-\frac{1}{e^{kN}}\right)}{1-\frac{1}{e^k}}$$ 이 됩니다.

[1-2] $S_N = \sum_{n=1}^{N} T_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_N$

$= \int_0^k e^{-x} f(x)dx + \int_k^{2k} e^{-x} f(x)dx + \cdots + \int_{k(N-1)}^{kN} e^{-x} f(x)dx = \int_0^{kN} e^{-x} f(x)dx$

$\therefore S_{N+1} = \int_0^{k(N+1)} e^{-x} f(x)dx$

$S_N \le \int_0^z e^{-x} f(x)dx < S_{N+1}$에서 $\int_0^{kN} e^{-x} f(x)dx \le \int_0^z e^{-x} f(x)dx < \int_0^{k(N+1)} e^{-x} f(x)dx$

$e^{-x} f(x) \ge 0$이므로 $kN \le z < k(N+1)$ $\therefore \frac{z}{k} - 1 < N \le \frac{z}{k}$ 즉, $N = \left[\frac{z}{k}\right]$

[1-3] $z \to \infty$ 이면, $N \to \infty$ 이므로 $\lim_{N\to\infty} S_N \le \lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-x} f(x)dx \le \lim_{N\to\infty} S_{N+1}$

$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} S_{N+1} = \frac{T_1}{1 - \frac{1}{e^k}}$ (극한의 대소비교에 대한 정리)

따라서, 극한값이 존재하며, 그 극한값은 $\frac{T_1}{1 - \frac{1}{e^k}}$ 입니다.

[1-4] $h(x) \ge 0$이므로 $V(z) = \int_0^z h(x)dx = \int_0^z e^{-x} |\cos \pi x| dx$

$f(x) = |\cos \pi x|$로 놓으면 $f(x)$는 주기가 1인 함수이므로 $f(x) = f(x+1)$이 성립합니다.

$\therefore \lim_{z\to\infty} V(z) = \lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-x} f(x)dx = \frac{T_1}{1 - \frac{1}{e}}$ ($\because$ 논제 [1-3])

이 때, $T_1 = \int_0^1 e^{-x} |\cos \pi x| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x} \cos \pi x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} \cos \pi x = \frac{2\pi\sqrt{e} + e - 1}{\pi^2 e + e}$ 이므로

$\therefore \lim_{z\to\infty} V(z) = \frac{2\pi\sqrt{e} + e - 1}{(\pi^2 + 1)(e - 1)}$ ■

반드시, 지원하고자 하는 대학의 논제를 프린트하셔서 풀어보시기 바랍니다. '계단식 구조'임을 항상 떠올리십시오.

Chapter 8. Problem Solving Strategies

이번 단원은 여태껏 수리논술 혹은 심층면접 등에서 출제된 문제들 중 상당히 높은 정도의 창의력을 요구하는 문항들에 대해서 살펴볼 것입니다. 어느 정도 익숙하게 연습하신다면, 이러한 방법들 또한 존재함을 대략적으로 기억해두시면 차후 비슷한 문항이 나왔을 때 쉽게 이용하실 수 있을 것입니다.

$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^x} dx$**의 값을 구하여라.** (8. 1)

위의 문제를 해결하기 위해서는, 적분식 안의 식을 함수 $f(x)$로 설정하고, $f(x)$와 $f(-x)$의 관계에 대해서 살펴보아야 합니다. 만약 이 문항이 실제 수리논술에 출제되었다면, 그 전의 소논제 혹은 제시문에서 $f(x)$와 $f(-x)$에 대한 관계를 제시해주었을 확률이 매우 높을 것입니다.

$f(x)$를 아래와 같이 설정합니다.

$$f(x) = \frac{x^2}{1+e^x} \quad (8.\ 2)$$

이 때, 다음 일련의 과정이 성립합니다.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(-t)dt + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} \{f(-x)+f(x)\}dx \quad (8.\ 3)$$

$f(-x)+f(x)$를 직접 구하면 아래와 같습니다.

$$f(-x)+f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}} + \frac{x^2}{1+e^x} = \frac{x^2(1+e^x)}{1+e^x} = x^2 \quad (8.\ 4)$$

따라서, 구하고자 하는 값은 다음과 같습니다.

$$\therefore \int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (8.\ 5)$$

다음 문제를 제시하겠습니다.

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx$**의 값을 구하여라.** (8. 6)

이 문제는 겉으로 보기에는 치환적분인 것 같습니다. 하지만 아무리 치환을 해보아도 안 됩니다. 적분식 안의 함수를 '두 부분'으로 나누어서, 반각공식을 적용하여야 합니다. 아마 이 문항이 실제로 출제

되었다면 매우 높은 확률로 반각공식을 적용하는 문제가 사전에 제시되었거나, 제시문에 있었을 것입니다. 혹은, 적분식 안의 함수를 이전 제시문에서 둘로 나누는 방법이 사용되었을 것입니다.

해당 적분식은 아래와 같이 두 부분으로 나눌 수 있습니다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx \quad (8.\ 7)$$

반각공식을 (8. 7)의 첫 번째 분할된 식에 적용하면 아래와 같은 일련의 과정이 성립합니다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2}dx = \left[\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad (8.\ 8)$$

또한, (8. 7)의 두 번째 분할된 식은 다음과 같은 일련의 과정을 통해 값을 구할 수 있습니다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{1+\cos x}dx = -\left[\ln(1+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 \quad (8.\ 9)$$

따라서, (8. 8)과 (8. 9)의 두 값을 더하면 다음과 같습니다.

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = 1+\ln 2 \quad (8.\ 10)$$

다음 문제를 제시해보겠습니다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$**의 값을 구하여라.** (8. 11)

이 문항은 특수한 보조정리가 필요합니다. 만약 본 문항이 수리논술에 출제되었다면, 이 보조정리를 사전에 제시문 혹은 이전 소논제를 통해 증명을 한 상태일 것입니다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx \quad (8.\ 12)$$

위의 보조정리를 아마 이전 소논제에서 제시해주지 않았을까 생각합니다. 위 식의 증명은 간단합니다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx \quad (8.\ 13)$$

이제 우리는 따름정리 (8. 12)를 이용하여 (8. 11)의 답을 도출해낼 것입니다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt = I \quad (8.\ 13)$$

위와 같은 일련의 과정이 성립함을 알 수 있습니다. (8. 13)에 제시된 두 적분식을 더합니다. 더한 후 다음과 같은 과정을 통해 계산합니다.

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1}{2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin t)dt \\ &= \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)dt\right\} \\ &= \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(I+I) \quad (\because \ln(\sin t) = \ln\{\sin(\pi - t)\}) \quad (8.\ 14) \end{aligned}$$

(8. 14)를 정리하면, 다음과 같습니다.

$$2I = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + I, \quad I = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} \quad (8.\ 15)$$

따라서, 구하고자 하는 값은 아래와 같습니다.

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} \quad (8.\ 16)$$

다음 문제를 제시하겠습니다.

$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$**의 값을 구하여라.** (8. 17)

이 문제 또한 하나의 보조정리와, 삼각치환이 사용되는 문제입니다. 만약 이 문항이 수리논술에 출제되었다면, 아마 제시문에서 삼각치환이 제시되고, 다른 보조정리는 이전의 소논제에서 이미 증명했던 상황일 것입니다. 이 문제를 풀기 위해서는 다음 보조정리가 필요합니다.

$f(a-x) = f(x)$일 때, $\displaystyle\int_0^a xf(x)dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$ (8. 18)

(8. 18)의 따름정리를 증명하는 것은 어렵지 않습니다. 다음의 과정을 통해 증명할 수 있습니다.

$$I=\int_0^a xf(x)dx=-\int_a^0 (a-t)f(a-t)dt=\int_0^a (a-t)f(t)dt$$
$$=a\int_0^a f(t)dt-\int_0^a tf(t)dt=a\int_0^a f(t)dt-I \quad (8.\ 19)$$

(8. 19)를 정리하면 (8. 18)의 따름정리를 도출할 수 있습니다.

따라서 $2I=a\int_0^a f(t)dt$, 즉 $I=\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$이다. (8. 20)

이제, 이를 이용하여 (8. 17)의 문제를 풀어보도록 하겠습니다.

$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$라고 할 때, $f(\pi-x)=f(x)$가 성립한다. (8. 21)

(8. 21)을 통해 (8. 18)을 사용하기 위한 기본 조건이 증명되었으므로, (8. 18)을 바로 적용합니다.

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \quad (8.\ 22)$$

익숙한 상황입니다. $\cos x=t$로 치환한 후, 바로 $t=\tan\theta$로 삼각치환을 시도합니다.

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta=\frac{\pi}{2} \quad (8.\ 23)$$

따라서, 최종적으로 아래와 같은 결론을 내릴 수 있습니다.

$$\therefore \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4} \quad (8.\ 24)$$

다음 문제를 제시하겠습니다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$**의 값을 구하여라.** (8. 25)

이 문항은 ‘구분구적법’이라는 키워드와, ‘극한의 대소비교(샌드위치 정리)’라는 키워드 두 가지가 필요합니다. 만약 이 문항이 수리논술에 출제되었다면, 아마 매우 높은 확률로 제시문에서 두 키워드를 언급해두었을 것입니다. 우리는 이 두 가지를 도구로 삼아서 문제를 풀어야 합니다. 조금 더 나아간다면, ‘적분판정법’을 키워드로 삼을 수도 있겠습니다. 미분적분학 수열 파트에서 급수의 수렴 혹은 발산을 판정하기 위하여 적분판정법을 도입하고 이를 증명하는데, 이 때 증명방법에 사용되는 방법입니다.

우리는 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$를 설정하고, $f(x)$와 $h(x)$의 극한값이 동일한 경우를 생각해볼 것입니다. 세 함수를 다음과 같이 설정합니다.

$$f(x) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx,\ g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ h(x) = 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x} dx \quad (8.\ 26)$$

이 때, $\Delta x = 1$로 생각했을 때의 구분구적법 그래프를 떠올려보면, 다음의 부등식이 성립함을 알 수 있습니다. (직접 종이에 대고 그려보시는 것을 추천드립니다.)

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad (8.\ 27)$$

이는 곧 다음의 부등식으로 변형 가능합니다.

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n \quad (8.\ 28)$$

각 변을 $\ln n$으로 나누어야 합니다.

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} < \frac{1}{\ln n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{\ln n} + 1 \quad (8.\ 29)$$

부등식의 모든 변에 n무한대로 발산시키는 극한을 취하면, 다음과 같은 결과를 도출할 수 있습니다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 \quad (8.\ 30)$$

Chapter 9. 서술법

아마 본 단원이 가장 실전적인 지침이 되지 않을까 싶습니다. 문제를 다 풀었다면, 이를 '서술'해야 합니다. 논리적이고 수학적인 잣대에 맞추어 서술하는 것도 중요하지만, 일단 '상대에게 전달하기 위한 목적'이 가장 중요합니다. 몇 가지 지침을 서술하도록 하겠습니다.

1) 논리적으로 무결해야 합니다. '직관적으로 옳기 때문에' 성립한다는 내용의 풀이는 올바른 답안이 아닙니다. 직관적인 풀이가 아니라, 왜 이것이 설명하는지 논리적으로 설명하는 답안이 가장 좋습니다. 다만, 굉장히 기초적인 수준의 직관이고 유치원 혹은 초등학생도 알 정도의 직관이라면 '증명해야 할지, 혹은 넘어갈지' 꼭 생각해보아야 합니다. 원과 접선이 만나는 지점에서 원의 중심에 선을 그을 때, 그 선과 접선은 직교한다는 사실을 '굳이 증명해야 할 필요'는 없을 것이라 생각합니다.

2) 전달하고자 하는 바가 간결하고, 명확하여야 합니다. 수리'논술'이라고 하여 언어적으로 길게 늘여 쓸 필요는 없습니다. 반드시 필요한 부분만 서술하되, 모든 부분이 서술되어야 합니다. 요컨대, 자신의 풀이에서 핵심을 파악하고, 그 핵심적인 요소들이 모두 포함되도록, 하지만 간결하게 작성해야 한다는 것입니다. 간결하고 핵심적인 답안에 보다 높은 점수를 줄 수 밖에 없는 것은 필연적인 결과입니다.

3) 제시문에 제시된 내용들과 긴밀하게 연결되어야 합니다. '[제시문 1]에서 제시된 내용을 활용하면~'과 같은 내용을 서술하셔도 좋을 것입니다. 여러분들이 제시문을 읽고, 그것을 어떻게 문제에 적용할 것인지 '충분히 생각했음을' 답안에 드러내십시오. 필연성과 개연성을 토대로, 논리적 무결성이 없고 간결하고 명확한 답안을 작성하는 것. 이것이 서술에 있어서 가장 핵심이 되는 부분입니다.

4) 제시문이나, 중등교육과정에서 배우지 않은 내용을 서술하지 마십시오. 혹은, 중등교육과정에서 배우지 않은 내용을 서술하고자 할 때에는 반드시 증명을 거치십시오. 제시문에 나오지 않은 내용 중에 증명되지 않은 내용을 멋대로 차용하지 마십시오. 이는 답안의 논리성을 떨어트리는 기피해야 할 요소입니다. 가령, 논술 답안에서 로피탈 정리를 사용하거나 라그랑주 승수법을 사용했다면 이를 증명하십시오. 만약 증명하지 못하시겠다면, 해당 방법을 사용하지 마십시오. 물론, 제시문에 로피탈 정리 혹은 라그랑주 승수법에 대한 이야기가 제시되어있다면, 마음껏 활용하셔도 좋을 것입니다.

집필을 마치며

일단, 지금 내용부분에 대한 타이핑을 막 끝낸 지금 가장 먼저 드는 생각은 '배가 고프다'는 것과, '치킨이 먹고싶다'는 것입니다. 살려주세요. 배가고파요. 돈이없어요 ㅜㅜ

어느덧 제가 수리논술 교재를 만들어서 배포한지 3년이 되었습니다. 3번의 제작경험을 통해 굉장한 소스를 쌓았고, 확실히 수리논술이라는 형태의 시험에 대해서 심층적으로 분석하고 있다는 느낌을 매년 받고 있습니다. 이런 일련의 과정에 상당히 재미를 붙였고, 이제는 단순히 Final 교재뿐만 아니라, 본격적인 '수리논술 전용 완벽 대비 교재'를 목표로 집필을 시작해볼까 합니다. 이미 여러 책을 보고 공부하여 수백페이지에 이르는 원고를 작성해 두었으나, 이를 타이핑하고 Geogebra로 그래프를 그리는 과정이 굉장히 오래 걸리네요. 사실 이 Final 교재에도 추가적으로 넣고 싶은 문항들과 내용들이 상당히 많았지만 체력의 한계와 시간의 한계, 그리고 이 교재를 '2~3일만에 독파할 수 있게 만들고자 하는 목표'가 있기에 최대한 필요한 부분만을 선별하여 넣을 수 밖에 없었습니다.

부족한 교재이지만, 여러분들께 큰 도움이 되었으면 합니다. 고작 몇 시간에 수십만원을 호가하는 대학 Final 강의따위보다 훨씬 질높고 알찬 교재가 되기 위해 노력해왔고, 앞으로도 노력할 것입니다. 수학의 본질은 자유에 있다는 누군가의 말처럼, 물론 그가 이것을 의도한 것은 아니겠지만, 지식의 본질은 '자유'에 있다는 것을 믿고 있습니다. 자유로운 사고와 더불어, 지식 자체가 재화에 얽매이지 않은 형태가 되었으면 합니다. 물론, 타인의 지적 재산권은 존중해야겠지만 적어도 제가 가진 지식에 대해서는 가치를 매기고 싶진 않습니다. 이 교재를 시작으로, 언젠가 이 교재의 도움을 받은 누군가가 또 다른 지식을 돈에 얽매이지 않고 베풀고, 그것을 또 기점으로 하여 점차 더 많은 사람들이 남을 도우며 살아갔으면 합니다.

몇 명의 학생을 무료로 과외하며 느낀 것은, 그들에게 부족한 것은 '정보'라는 것이었습니다. '무엇을', '어떻게', '왜' 공부해야 하는지 결여된 상태에서는 공부가 성립이 될 수가 없었습니다. 그리고 올해, 저는 그들에게 있어서 이러한 항목들을 채워줄 일종의 모범 답안을 찾아낸 것 같습니다.

보다 더 나은 세상을 위해 노력하겠습니다. 여러분들이 여러분들 스스로에게 만족할 수 있기 위해서 노력하겠습니다. 세상은 비판적이고 전투적으로 살더라도, 여러분들 스스로에게는 언제나 관대하고 만족하며, 스스로를 사랑하는 사람들이 되었으면 합니다.

말이 장황하게 길어졌네요. 거의 30페이지에 육박하는 파이널 교재를 타이핑하는 동안 수도 없이 다짐했던, '이런 꼰대짓으로 끝을 맺지는 말아야겠다'는 이야기가 무색해졌습니다. 조만간 Final 교재가 아닌, 수백페이지에 이르는 정식 수리논술 교재로 찾아뵙겠습니다. 아직 확정된 것은 아무것도 없지만, 아마 이 교재 또한 무료로 배포될 것 같습니다. 보잘 것 없는 자료 보아주셔서 감사합니다.

그럼 이만.