교육과정썰

내년부터 시작되는 09개정 교육과정의 예비평가가 시행되지 않아 내년 수능을 준비하는 학생들의 경우 시행착오가 좀 있을 듯 합니다. 그 여파인지 올해 수능은 교육과정 개편과 무관해야 하지만 올해 평가원 시험에서 경우의 수 부분에서 경우 나누고, 세는 것이 중요한 문항들이 눈에 띄고 있고, 때마침 09개정 과정에서 그 이전처럼 직접 나열해 보고 경우나누어 세는 것을 강조하고 있습니다.

07개정 경우의 수 부분

〈교수·학습 상의 유의점〉

[수학(하)]

① 경우의 수, 순열, 조합을 이용하여 실생활 문제를 해결해 봄으로써 그 유용성을 인식하게 한다.

② 복잡한 순열과 조합은 다루지 않는다.

[미적분과통계기본]

① 중복조합과 이항정리는 개념을 이해하는 정도로 간단히 다룬다.

[적분과통계]

① 염주순열, 같은 것이 있는 경우의 원순열은 다루지 않는다.

09개정 경우의 수 부분

〈교수·학습상의 유의점〉

① 합의 법칙과 곱의 법칙은 구체적인 예를 통해 직접 나열해 보거나 수형도를 그려 보는 등의 활동을 통해 그 의미를 이해하고 설명해 보게 한다.

② 경우의 수, 순열, 조합, 분할을 이용하여 실생활 문제를 해결해 봄으로써 그 유용성을 인식하게 한다.

③ 염주순열, 같은 것이 있는 원순열은 다루지 않는다.

④ 분할의 수를 구하는 식은 예를 통하여 이해하고 설명해 보게 한다.

그래서 07개정에 맞춘 최근 3개년 기출+실모 학습으로 부족할 수 있는 부분에 대한 두 번째 보완점으로 경우 나누기가 중요한 문항들을 잡았습니다.

참고로, 그간 수능,평가원 기출문항들에서 경우를 나누기가 키가 되었던 경우의 수가 아닌 문항들에 대한 일반적인 분석을 하려 하였으나 그 분량이 마무리 시점에 적당치 않아 〈부록〉으로 언급만 하고 경우의 수에 집중하도록 하겠습니다.

작년 수능 두 문제

1. #1411수능(A)

연립방정식

$$\begin{cases} x+y+z+3w=14 \\ x+y+z+w=10 \end{cases}$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는?

2. #1411수능(B)

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) $a \times b \times c$는 홀수이다.
(나) $a \le b \le c \le 20$

올 해 평가원 세 문제

3. #1506평가원(B)

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u 의 모든 순서쌍 (x, y, z, u) 의 개수를 구하시오.

(가) $x+y+z+u=6$
(나) $x \neq u$

4. #1509평가원(A)

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

(가) $a+b+c+3d=10$
(나) $a+b+c \le 5$

5. #1509평가원(B)

다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c+d=20$
(나) a, b, c는 모두 d의 배수이다.

순서쌍의 개수가 꾸준히 나오고 있습니다. 물론 수능 때 또 통수를 칠 가능성 농후하지만 최선을 다해서 준비해야죠 뭐. 그런데 확실히 작년수능 두문제와 올해 평가원 문제는 느낌이 다르죠?
나열, 경우나누기가 강조된 느낌을 느끼신다면 일단 성공~ 무난하게 이 문제들을 푸셨다면 크게 걱정은 안하셔도 됩니다. 그래도 만전을 기한다는 의미에서 스스로 학습할 수 있는 보충문항을 드리겠습니다. (올해판 장영진Plus모의고사 에도 좋은 문항들이 있답니다.(광고^^))
주요문항들에 대한 풀이는 해설강의를 참조하시면 되겠습니다. 그럼 풀고 또 만나요~

순서쌍개수

6. $(a+b+c)(d+e)=27$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하시오.

7. 다음 조건을 만족시키는 네 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오

(가) $a(b+c+d) \leq 20$ (나) $a+b+c+d=12$

8. 다음 두 조건을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) a, b, c는 모두 7미만의 자연수이다. (나) $a+b+c=9$

9. 다음 조건을 만족시키는 세 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

(가) $x \geq 2$, $y \geq -1$, $0 \leq z \leq 7$ (나) $x+y+z=10$

① 52 ② 54 ③ 56 ④ 58 ⑤ 60

10. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c=10$ (나) $a \times b = a \times c$

11. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c+d=11$ (나) $a \times b \times c$는 홀수이다.

12. #1108사관

$2\sum_{k=1}^{5} x_k + 3\sum_{k=6}^{10} x_k = 8$을 만족시키는 서로 다른 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{10})$의 개수를 구하시오. (단, x_i는 음이 아닌 정수이고 $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$이다.)

13. 방정식 $(x_1+x_2)x_3x_4x_5=27$를 만족시키는 양의 정수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수를 구하시오.

중복뽑기

14. $(x+y+z+w)^5$의 전개식에서 두 가지 종류의 문자의 곱으로만 이루어진 서로 다른 항의 개수는?

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

15. 숫자 $1, 2, 3, 4, 5$에서 중복을 허락하여 5개를 택할 때, 홀수가 홀수 개가 되는 경우의 수는?

① 48 ② 54 ③ 60 ④ 66 ⑤ 72

16. 집합 $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$에 대하여 집합 B를 $B=\{a\times b\times c\times d\times e\times f\,|\,a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$는 집합 A의 원소이다. $\}$로 정의할 때, 집합 B의 원소 중 70의 배수인 것의 개수는?

① 35 ② 42 ③ 50 ④ 56 ⑤ 64

17. 그림과 같이 6등분된 원의 각 영역에 점수가 표시되어 있다. 이 과녁에 크기와 모양이 같은 5개의 화살을 쏘아 점수를 얻는 경기가 있다. 5개의 화살을 모두 과녁에 맞혔을 때, 점수의 합이 37점 이하가 되는 경우의 수는? (단, 화살은 반드시 어느 한 점수를 나타내는 영역을 맞히며, 화살을 쏘는 순서는 고려하지 않는다.)

① 240 ② 244 ③ 248 ④ 252 ⑤ 256

담기

18. #1310서울(B)

같은 종류의 구슬 다섯 개를 서로 다른 세 개의 주머니에 나누어 넣으려고 한다. 각 주머니 안의 구슬이 세 개 이하가 되도록 넣는 방법의 수는? (단, 구슬끼리는 서로 구별하지 않고 빈 주머니가 있을 수도 있다.)

① 10 ② 11 ③ 12

④ 13 ⑤ 14

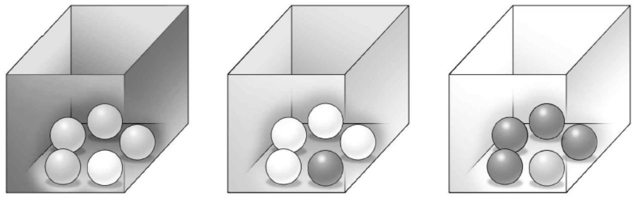
19. 같은 종류의 검은 구슬 3개, 흰 구슬 10개를 서로 다른 네 상자에 넣으려고 한다. 각 상자에 넣은 흰 구슬의 개수가 서로 다르다고 할 때, 구슬을 상자에 넣는 방법의 수는? (단, 모든 상자에는 흰 구슬이 적어도 한 개 들어 있다.)

① 320 ② 400 ③ 480

④ 560 ⑤ 720

20. #1410서울(A)

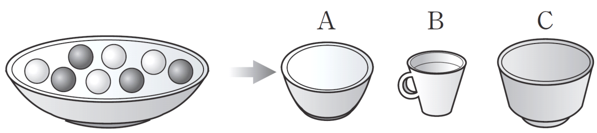
빨간 공, 파란 공, 노란 공이 각각 5개씩 있다. 이 15개의 공만을 사용하여 빨간 상자, 파란 상자, 노란 상자에 상자의 색과 다른 색의 공을 5개씩 담으려고 한다. 공을 담는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)



① 6 ② 12 ③ 18

④ 24 ⑤ 30

21. 모양과 크기가 같은 흰 바둑돌 4개, 검은 바둑돌 4개가 있다. 이 중에서 4개의 바둑돌을 택하여 그릇 A, B, C에 넣는 방법의 수는? (단, 같은 종류의 바둑돌은 서로 구별이 되지 않고 빈 그릇이 있을 수도 있다.)



① 76 ② 86 ③ 96

④116 ⑤ 126

부록 (각문항의 키는 해설참조)

22. #1506평가원(B)

양수 t에 대하여 $\log t$의 가수를 $f(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 양수 t의 개수를 a_n이라 할 때, a_4+a_5의 값은?

(가) $1 \le t < 100$
(나) $f(t^n)+2f(t)=1$

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

23. #1509평가원(B) : B형전용

두 초점이 F, F$'$인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P는 제1사분면에 있다.
(나) 삼각형 PF$'$F가 이등변삼각형이다.

삼각형 PF$'$F의 넓이를 a라 할 때, 모든 a의 값의 곱은?

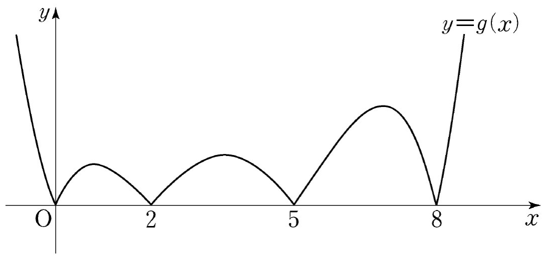
① $3\sqrt{77}$ ② $6\sqrt{21}$ ③ $9\sqrt{10}$ ④ $21\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{105}$

24. #1211수능

삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)dt\right|$$

라 할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\int_m^{m+2} f(x)dx>0$을 만족시키는 모든 자연수 m의 합을 구하시오.

25. #0911수능

실수 a에 대하여 집합

$$\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는대로 고른 것은?

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$
ㄴ. $\lim_{a\to c+0} f(a) \ne \lim_{a\to c-0} f(a)$인 실수 c는 2개이다.
ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 및 해설

1. 45

$\begin{cases} x+y+z+3w=14 & \cdots ㉠ \\ x+y+z+w=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면 $2w=4$이므로 $w=2$
㉡에서 $w=2$를 대입하여 정리하면 $x+y+z=8$
따라서 $x+y+z=8$을 만족하는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_2=45$
이 때, w는 항상 2이므로 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 45이다.

2. 220

$a\times b\times c$가 홀수이므로 a, b, c 모두 홀수
$a\le b\le c\le 20$의 조건에 의해 20 이하의 홀수들 중 중복하여 3개를 뽑는 경우의 수를 구하면 된다. 20 이하의 홀수는 총 10개이므로 구하 고자 하는 경우의 수는 ${}_{10}H_3$
${}_{10}H_3={}_{12}C_3=220$

3. 68

$x+y+z+u=6$인 경우의 수에서 $x=u$인 경우의 수를 빼면 된다.
$x+y+z+u=6$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해 개수는
${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6=84$이고
① $x=u=0$ 일 때 $y+z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는 ${}_2H_6={}_7C_6=7$ 가지
② $x=u=1$ 일 때 $y+z=4$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는 ${}_2H_4={}_5C_4=5$ 가지
③ $x=u=2$ 일 때 $y+z=2$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는 ${}_2H_2={}_3C_2=3$ 가지
④ $x=u=3$ 일 때 $y+z=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는 $y=0$, $z=0$ 인 1 가지
따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는
$84-(7+5+3+1)=68$ 가지이다.

4. ①

$a+b+c\le 5$이므로, $d=0$, 1일 때는 만족하는 순서쌍이 없다.
i) $d=2$일 때 $a+b+c=4$ $\quad\therefore {}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
ii) $d=3$일 때 $a+b+c=1$ $\quad\therefore {}_3H_1={}_3C_1=3$ $\quad\therefore 15+3=18$

5. 32

(나)에서 a, b, c가 모두 d의 배수이므로 (가)의 좌변 $a+b+c+d$는 d의 배수이다. 따라서 d는 20의 약수여야 한다. $\therefore d$는 2 또는 4 또는 5만 가능하다.
i) $d=2$일 때 $a=2a_1$, $b=2b_1$, $c=2c_1$, (a_1, b_1, c_1은 자연수)라 하면 $2a_1+2b_1+2c_1+2=20$ ($\because$ (가)에서)
$a_1+b_1+c_1+1=10$ $\therefore a_1+b_1+c_1=9$ 이것을 만족하는 쌍 $(a,\ b,\ c,\ 2)$의 개수는 ${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$
ii) $d=4$일 때 $a=4a_1$, $b=4b_1$, $c=4c_1$ (a_1, b_1, c_1은 자연수)라 하면 $4a_1+4b_1+4c_1+4=20$ ($\because$ (가)에서)
$a_1+b_1+c_1+1=5$ $a_1+b_1+c_1=4$ 이것을 만족하는 쌍 $(a,\ b,\ c,\ 4)$의 개수는 ${}_3H_1={}_3C_1=3$
iii) $d=5$일 때 (가)를 만족하는 쌍은 $(5,\ 5,\ 5,\ 5)$ 뿐이다.
i), ii), iii)에서 모든 순서쌍의 개수는 $28+3+1=32$

6. 56

(ⅰ) $a+b+c=3$, $d+e=9$일 때,
a,b,c,d,e가 자연수이므로
${}_3H_0\times{}_2H_7=1\times{}_8C_7=8$
(ⅱ) $a+b+c=9$, $d+e=3$일 때,
a,b,c,d,e가 자연수이므로
${}_3H_6\times{}_2H_1={}_8C_6\times{}_2C_1=28\times 2=56$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $8+56=64$이다.

7. 81

(ⅰ) $a=1$, $b+c+d=11$일 때,
a,b,c,d가 자연수이므로
${}_3H_8={}_{10}C_8=45$
(ⅱ) $a=2$, $b+c+d=10$일 때,
a,b,c,d가 자연수이므로
${}_3H_7={}_9C_7=36$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $45+36=81$이다.

8. 24

$a-1=a'$, $b-1=b'$, $c-1=c'$라 하면
$a\ge 1$, $b\ge 1$, $c\ge 1$이고 $a+b+c=9$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 방정식
$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=9$
$a'+b'+c'=6$ $(a'\ge 0,\ b'\ge 0,\ c'\ge 0)$
을 만족시키는 순서쌍 $(a',\ b',\ c')$의 개수와 같다.
$\therefore\ {}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\dfrac{8\times 7}{2\times 1}=28$
a, b, c중 7이상인 자연수가 있는 경우는
$(7,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 7,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 7)$의 세가지이므로
구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $27-3=24$이다.

9. ①

음이 아닌 정수 x', y'에 대하여 $x=x'+2$, $y=y'-1$이라 하면 $x\ge 2$, $y\ge -1$이 성립한다.
(나)에서 $x+y+z=(x'+2)+(y'-1)+z=10$ $\cdots$ ①
이므로
$x'+y'+z=9$ (단, x', y', z는 음이 아닌 정수)
이 방정식을 만족시키는 x', y', z의 순서쌍 $(x',\ y',\ z)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=\dfrac{11\times 10}{2\times 1}=55$(가지)
그런데, $0\le z\le 7$이므로
$z=8$, $z=9$인 경우를 제외하면 된다.
$z=8$일 때,

①에서 $(x'+2)+(y'-1)=2$, $x'+y'=1$이므로 2가지
$z=9$일 때,
①에서 $(x'+2)+(y'-1)=2$, $x'+y'=0$이므로 1가지
이다.
따라서, 구하는 순서쌍의 개수는 $55-3=52$이다.

10. 16

$a+b+c=10$을 만족시키는 음아닌 정수의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=\frac{12\times11}{2!}=66$$

$a\times b=a\times c$
$\Leftrightarrow a(b-c)=0$
$\Leftrightarrow a=0$, $b=c$이므로
i) $a=0$일 때,
$b+c=10$을 만족시키는 음아닌 정수 순서쌍의의 개수는
${}_2\mathrm{H}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_{10}=11$
ii) $b=c$일 때,
$a+2b=10$을 만족시키는 음아닌 정수 순서쌍의 개수를 직접
세어보면 6가지
i) ii)에 공통적으로 $(0,5,5)$가 포함되므로
전체의 경우의 수는 $11+6-1=16$가지이다.

11. 20

$a\times b\times c$가 홀수이므로 a,b,c가 모두 홀수이어야 하고

$d=11-(a+b+c)$이므로 d는 짝수이다.
따라서,
$a=2k+1$, $b=2l+1$, $c=2m+1$, $d=2n+2$
$(k,l,m,n$은 음아닌 정수)라 두면
$(2k+1)+(2l+1)+(2m+1)+(2n+2)=11$
$\therefore k+l+m+n=3$
을 만족시키는 음아닌 정수 k, l, m, n의
모든 순서쌍 $(k,\ l,\ m,\ n)$의 개수를 구하면 된다.

$${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\times5\times4}{3!}=20 \text{ 가지이다.}$$

12. 145

$\sum_{k=1}^{5}x_k=X$, $\sum_{k=6}^{10}x_k=Y$라 하면
X, Y가 음이 아닌 정수이므로
$2X+3Y=8$에서 $(X,\ Y)=(1,\ 2)$, $(4,\ 0)$
i) $(X,\ Y)=(1,\ 2)$을 만족하는 순서쌍
$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{10})$을 정하는 방법의 수는
${}_5\mathrm{H}_1\times{}_5\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2=75$
ii) $(X,\ Y)=(4,\ 0)$을 만족하는 순서쌍
$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{10})$을 정하는 방법의 수는
${}_5\mathrm{H}_4\times{}_5\mathrm{H}_0={}_8\mathrm{C}_4=70$
i), ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $75+70=145$

13. 62

$x_1+x_2\ge2$, $x_3x_4x_5\ge1$이므로 주어진 방정식을 만족시키는 경우는 $3\times9=27$, $9\times3=27$, $27\times1=27$인 경우가 있다.
(i) $x_1+x_2=3$이고 $x_3x_4x_5=9$인 경우
$x_1+x_2=3$을 만족시키는 양의 정수의 순서쌍
$(x_1,\ x_2)$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_1=2$
$x_3x_4x_5=9$를 만족시키려면
$x_3=3^a$, $x_4=3^b$, $x_5=3^c$ $(a,b,c$는 음아닌정수)꼴
이어야 하므로
$x_3x_4x_5=3^{a+b+c}=3^2$
이고 $(x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
이므로
순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는 $2\times6=12$
(ii) $x_1+x_2=9$이고 $x_3x_4x_5=3$인 경우
$x_1+x_2=9$를 만족시키는 양의 정수의 순서쌍
$(x_1,\ x_2)$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_7={}_8\mathrm{C}_7=8$
$x_3x_4x_5=3$을 만족시키는 양의 정수의 순서쌍은
(3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3) 세가지 이므로
순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는 $8\times3=24$
(iii) $x_1+x_2=27$이고 $x_3x_4x_5=1$인 경우
$x_1+x_2=27$를 만족시키는 양의 정수의 순서쌍
$(x_1,\ x_2)$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_{25}={}_{26}\mathrm{C}_{25}=26$
$x_3x_4x_5=1$을 만족시키는 양의 정수의 순서쌍
양의 정수의 순서쌍은 (1, 1, 1) 뿐이므로
순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는 $26\times1=26$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는
$12+24+26=62$

14. ①

$(x+y+z+w)^5$을 전개하면 모든 항은 $x^py^qz^rw^s$꼴이다.
두 가지 종류의 문자를 택하는 방법은
${}_4\mathrm{C}_2=6$로 6가지가 있고
x, y의 곱으로만 이루어진 서로 다른 항의 개수는
방정식 $p+q=5$를 만족하는 양의 정수 p, q의 순서쌍
$(p,\ q)$의 개수와 같으므로
${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$
따라서 구하는 항의 개수는
$6\times4=24$

15. ④

홀수가 1개인 경우 ${}_3\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_4=3\times5=15$
홀수가 3개인 경우 ${}_3\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_2=10\times3=30$
홀수가 5개인 경우 ${}_3\mathrm{H}_5=21$
따라서, 홀수가 홀수 개인 경우는 66가지이다.

16. ④
집합 B는 집합 A의 원소 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하여 모두 곱한 값들을 원소로 하는 집합이다.
따라서 집합 B의 원소 중 $70(=2\times5\times7)$의 배수인 것의 개수는 집합 A의 원소 중에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 방법 중에서 2, 5, 7을 적어도 하나씩 택하는 방법의 수와 같다.
(ⅰ) 2, 3, 5, 7, 11, 13 중에서 2,5,7을 각각 한 개씩 택하는 방법의 수는 1가지
(ⅱ) 2, 3, 5, 7, 11, 13 중에서 중복을 허락하여 나머지 $3(=6-3)$개를 택하는 방법의 수는
$${}_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$
(ⅰ), (ⅱ)에서 집합 B의 원소 중 35의 배수인 것의 개수는 $1\times56=56$

17. ③
5개의 화살로 3점 a개, 4점 b개, 5점 c개, 6점 d개, 7점 e개, 8점 f개를 맞히는 경우의 수는 방정식 $a+b+c+d+e+f=5$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.
즉,
$${}_6H_5={}_{10}C_5=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$$
이때, 점수의 합이 38점 이상인 경우는 38점, 39점, 40점이고 각 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)$는
(ⅰ) 40점 : $(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5)$
(ⅱ) 39점 : $(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 4)$
(ⅲ) 38점 : $(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 4)$, $(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3)$
의 4가지 경우가 있다.
따라서 구하는 경우의 수는 $252-4=248$

18. ③
세 개의 주머니 A, B, C에 넣은 공의 수를 각각 a, b, c라 하면 $a+b+c=5$이므로 가능한 모든 경우의 수는
${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5=21$
(ⅰ) 2개의 주머니에 다섯 개의 공을 1개와 4개로 나누어 넣는 경우의 수 ${}_3P_2=6$
(ⅱ) 한 개의 주머니에 다섯 개의 공을 모두 넣는 경 우의 수 ${}_3C_1=3$
따라서 구하는 경우의 수는 $21-(6+3)=12$이다.
[다른 풀이]
한 주머니에 네 개 이상의 공을 넣을 수 없으므로 세 개의 주머니에 넣는 공의 수에 따라 경우를 나누면
(ⅰ) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 다른 주머니에 공을 두 개 넣는 경우는 3, 2, 0을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $3!=6$
(ⅱ) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 한 개씩 넣는 경우는 3, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$
(ⅲ) 한 개의 주머니에 공을 한 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 두 개씩 넣는 경우는 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$6+3+3=12$이다.

19. ③
10을 서로 다른 네 개의 자연수의 합으로 나타내는 방법은 $10=4+3+2+1$ 뿐이므로 서로 다른 상자에 흰 구슬의 수를 다르게 넣는 방법의 수는 $4!=24$이다.
한편, 검은 구슬 3개를 서로 다른 네 상자에 넣는 방법의 수는 ${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$
따라서 구하는 방법의 수는 $24\times20=480$

20. ①
한 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.
예를 들어 각 상자에는 상자의 색과 다른 색의 공을 담아야 하므로 빨간 상자에 파란 공 1개와 노란 공 4개를 담으면 노란 상자에는 파란 공 4개와 빨간 공 1개를, 파란 상자에는 노란 공 1개와 빨간 공 4개를 담아야 한다.
즉, 빨간 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.
그러므로 노란 공 5개와 파란 공 5개 중에서 빨간 상자에 담을 5개의 공을 선택하는 방법의 수가 구하는 경우의 수이다.
따라서 노란 공과 파란 공 2종류의 공에서 중복을 허락하여 5개의 공을 빨간 상자에 담는 방법의 수는 ${}_{2+5-1}C_5=6$이다.

21. ⑤
바둑돌을 4개 택할 때, 흰 바둑돌과 검은 바둑돌의 개수에 따라 나누어 생각한다.
그릇 A, 그릇 B, 그릇 C에 담긴 흰 바둑돌의 개수를 각각 x, y, z라 하고 검은 바둑돌의 개수를 각각 a, b, c라 하면
(ⅰ) 흰 바둑돌 4개를 택하는 경우
$x+y+z=4$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
$${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$
(ⅱ) 검은 바둑돌 4개를 택하는 경우
$a+b+c=4$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
$${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$
(ⅲ) 흰 바둑돌 3개, 검은 바둑돌 1개를 택하는 경우
$x+y+z=3$의 음이 아닌 정수해의 개수와 $a+b+c=1$의 음이 아닌 정수해의 개수의 곱과 같으므로
${}_3H_3\times{}_3H_1={}_5C_3\times{}_3C_1=30$
(ⅳ) 흰 바둑돌 1개, 검은 바둑돌 3개를 택하는 경우
$x+y+z=1$의 음이 아닌 정수해의 개수와 $a+b+c=3$의 음이 아닌 정수해의 개수의 곱과 같으므로
${}_3H_1\times{}_3H_3={}_3C_1\times{}_5C_3=30$
(ⅴ) 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 2개를 택하는 경우
$x+y+z=2$의 음이 아닌 정수해의 개수와 $a+b+c=2$의 음이 아닌 정수해의 개수의 곱과 같으므로
${}_3H_{2\times3}H_2={}_4C_2\times{}_4C_2=36$
따라서 구하는 방법의 수는
$15+15+30+30+36=126$

22. ③

Key : 가수에 따른 분류
(내신시기 습득되어야 하는 스킬)

$f(t)=\alpha$라 하면 $f(t^n)$이 될 수 있는 값은 $n\alpha$, $n\alpha-1$, ……, $n\alpha-(n-1)$이다. $f(t^n)$이 될 수 있는 k번째 가수를 $n\alpha-(k-1)$이라고 하면 ㈏조건에 의해

$f(t^n)+2f(t)=1$이고

$n\alpha-(k-1)+2\alpha=1$ ……㉠

이어야 한다. $\therefore \alpha=\dfrac{k}{n+2}$

또한 가수의 조건에 의해

$0\le n\alpha-(k-1)<1$ ……㉡

이어야 하므로 ㉠을 ㉡에 대입하면

$0\le 1-2\alpha<1$이고 $\therefore 0<\alpha\le\dfrac{1}{2}$

따라서

$0<\dfrac{k}{n+2}\le\dfrac{1}{2}$이고 $0<k\le\dfrac{n+2}{2}$이다.

i) $n=4$일 때

$0<k\le\dfrac{4+2}{2}=3$이므로 $k=1,\ 2,\ 3$이고

$1\le t<100$ 에서 지표가 0과 1인 두 가지 경우가 있으므로

$\therefore 2\cdot3=6$

ii) $n=5$일 때

$0<k\le\dfrac{5+2}{2}=3.5$

$k=1,\ 2,\ 3$

$1\le t<100$ 에서 지표가 0과 1인 두 가지 경우가 있으므로

$\therefore 2\cdot3=6$

따라서 구하는 답은 12이다.

23. ⑤

Key : 이등변삼각형이 두 종류임을 간파하기
(평면도형 문제가 두 개로 결정되는 것은 처음?)

쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$의 초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$ 점 P가 1사분면 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=2$ $\triangle\mathrm{PF}'\mathrm{F}$가 이등변삼각형인 경우는 $\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{F}}$ 이거나 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{F}}$ 일 때이다.

i) $\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{F}}=4$일 때 $\overline{\mathrm{PF}}=2$($\because$ ㉠에서)

$\therefore \triangle\mathrm{PF}'\mathrm{F}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$

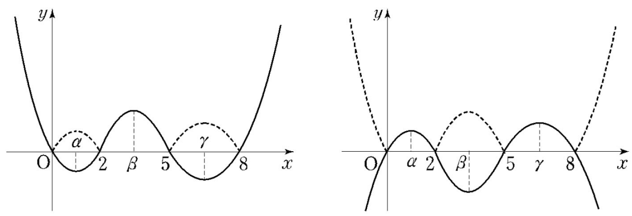
ii) $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{F}}=4$일 때 $\overline{\mathrm{PF}'}=6$($\because$ ㉠에서)

$\therefore \triangle\mathrm{PF}'\mathrm{F}=\dfrac{1}{2}\times6\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

i), ii)에서 가능한 모든 a값의 곱은 $\sqrt{15}\times3\sqrt{7}=3\sqrt{105}$

24. 12

Key : 최고차항의 계수는 항상 양이라는 편견없애기
(교과서를 비롯한 모든 개념정리과정의 폐혜)

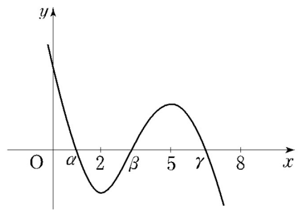


$h(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$라 하면

$h(x)$는 사차함수이므로 위 두 그림 중 하나이다.

$f(x)=h'(x)$이므로, 두 그림 중 $f(0)=h'(0)>0$을 만족하는 경우는 위의 오른쪽 그림이다.

$\therefore\ y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$\displaystyle\int_m^{m+2}f(x)=h(m+2)-h(m)$이고

$h(2)=0=h(0)$ $\quad\therefore\ h(2)-h(0)=0$

$h(3)<0<h(1)$ $\quad\therefore\ h(3)-h(1)<0$

$h(4)<0=h(2)$ $\quad\therefore\ h(4)-h(2)<0$

$h(5)=0>h(3)$ $\quad\therefore\ h(5)-h(3)>0$

$h(6)>0>h(4)$ $\quad\therefore\ h(6)-h(4)>0$

$h(7)>0=h(5)$ $\quad\therefore\ h(7)-h(5)>0$

$h(8)=0<h(6)$ $\quad\therefore\ h(8)-h(6)<0$

$h(9)<0<h(7)$ $\quad\therefore\ h(9)-h(7)<0$

$m\ge8$이면 $h(m+2)<h(m)$이므로,

$h(m+2)>h(m)$을 만족하는 자연수 m은 $m=3,\ 4,\ 5$의 3개이므로 $3+4+5=12$

25. ④

Key : 계수가 문자면 허당일 수 있음
(괄호속 방정식이 이차방정식이라는 것은 편견)

(i) $a\neq0$인 경우

방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 판별식 D가 양수이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2a^2-6a+4$

$=2(a^2-3a+2)=2(a-1)(a-2)>0$

$\therefore\ a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $a>2$

또한, 중근(한 개의 실근)을 가질 조건은

$\dfrac{D}{4}=2(a-1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=2$

또한, 실근을 갖지 않을 조건은

$\frac{D}{4}=2(a-1)(a-2)<0$

$\therefore\ 1<a<2$

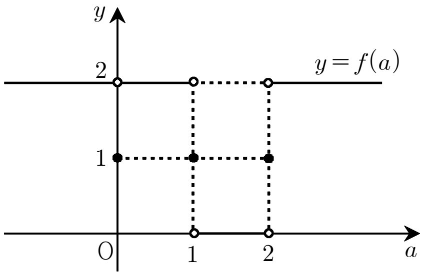
(ii) $a=0$인 경우

$-4x+2=0$이므로 실수 x는 $x=\frac{1}{2}$인 한 개다.

(i), (ii)에 의하여

$$f(a)=\begin{cases}2 & (a<0 \text{ 또는 } 0<a<1,\ a>2)\\ 1 & (a=0,\ 1,\ 2)\\ 0 & (1<a<2)\end{cases}$$

이를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



ㄱ. $\lim_{a\to 0}f(a)=2$, $f(0)=1$이므로 $\lim_{a\to 0}f(a)\neq f(0)$

(거짓)

ㄴ. $\lim_{a\to c+0}f(a)\neq\lim_{a\to c-0}f(a)$인 c는 $c=1$, $c=2$이다. (참)

ㄷ. $a=0,\ 1,\ 2$에서 함수 $f(a)$가 불연속이다.

(참)