10일의 기적

(미적분 해설지)

Part A. 올해기출 최종점검 2·3점 문제 (22문항)

Part B. 올해기출 최종점검 3·4점 문제 (13문항)

Part C. 올해기출 최종점검 고난도 문제 (13문항)

인간은 과정 앞에 무적이고, 결과 앞에 무력하다.
내가 매일 최선을 다하는 것만이
내가 이루어내야 할 유일한 일이다. -김지석

김지석수학연구소

미적분

1. 수열의극한

PART B

❄ 4점 ❄

(& 어려운 3점)

등비수열의 극한

[2023년 9월 (미적분) 29번]

1. 두 실수 a, b $(a>1,\ b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

18

(step1) a의 값 파악하기

ⅰ) $1<a<3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$ → 모순 $(\because\ a>1)$

ⅱ) $a=3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=1$$

$\therefore\ a=1$ → 모순 $(\because\ a>1)$

ⅲ) $a>3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a$$

$\therefore$ 성립

(step2) b의 값 파악하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$ 에서

ⅰ) $a>b$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{1}{a}$$

$\therefore\ \frac{1}{a}=\frac{9}{a}$ → 모순

ⅱ) $a=b$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=1$$

$\therefore\ 1=\frac{9}{a}$ ⇔ $a=9,\ b=9$

ⅲ) $a<b$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}{a\left(\frac{b}{a}\right)^n+1}=b$$

$\therefore\ b=\frac{9}{a}<3$ $(\because\ a>3)$

→ 모순 $(\because\ a<b)$

$\therefore\ a+b=9+9=18$

그래프

[2023년 3월 (미적분) 28번]

2. $a>0$, $a \neq 1$인 실수 a와 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 y축과 만나는 점을 A_n, 직선 $y=n$이 곡선 $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 B_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\frac{3}{2a+2}$$

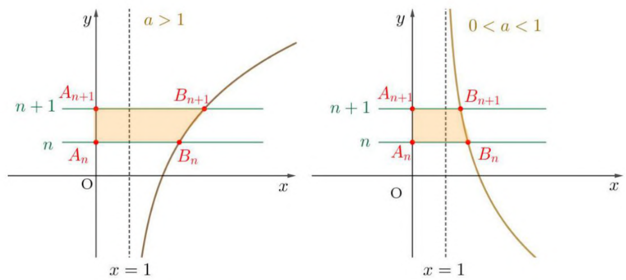
을 만족시키는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

②



$\log_a(x-1)=n$

$\Leftrightarrow\ x=a^n+1$

$\therefore\ \mathrm{B}_n(a^n+1,\ n)$

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}=\sqrt{\{(a^{n+1}+1)-(a^n+1)\}^2+1}$

$=\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}$

$S_n=\frac{1}{2}\times 1\times\{(a^n+1)+(a^{n+1}+1)\}$

$=\frac{(a+1)a^n+2}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}}{(a+1)a^n+2}$$

i) $a>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a-1)^2+\frac{1}{a^{2n}}}}{(a+1)+\frac{2}{a_n}}$$

$$=\frac{2(a-1)}{a+1}=\frac{3}{2a+2}$$

$\therefore\ a=\frac{7}{4}$

ii) $0<a<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}a^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\ \mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\frac{2\times 1}{2}=1=\frac{3}{2a+2}$$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

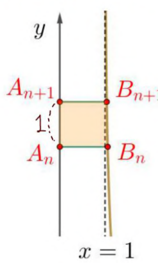
$\therefore\ \frac{1}{2}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$

[다른 풀이]

점근선 활용 극한 상황에서의 도형 형태 추론

$0<a<1$일 때

$n\to\infty$이면 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$은 정사각형에 한없이 가까워진다.



$S_n\to 1$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}\to 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=1=\frac{3}{2a+2}$$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

등비급수

[2023년 9월 (미적분) 26번]

3. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 b_2 = 1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$$

일 때, $\sum_{n=1} b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d,
등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라고 하면
$a_1 = b_1 = 1$ 이므로
$a_2 b_2 = 1 \Leftrightarrow (1+d)r = 1$

$$\therefore d = \frac{1}{r} - 1 = \frac{1-r}{r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) + b_n\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left(1 - \frac{1}{a_{n+1}}\right) + \frac{1}{1-r}$$

$$= \frac{1}{d} + \frac{1}{1-r} = \frac{r}{1-r} + \frac{1}{1-r} = \frac{1+r}{1-r} = 2$$

$$\therefore r = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1} b_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

[2023년 10월 (미적분) 27번]

4. 모든 항이 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} = 4$$

이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}$이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

교육청 해설

[정답] ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$은 첫째항이 $\frac{a}{3}$, 공비가 $\frac{r}{3}$인

등비급수이고 수렴하므로 $-1 < \frac{r}{3} < 1$,

$-3 < r < 3$ …… ㉠

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}$은 첫째항이 $\frac{1}{ar}$, 공비가 $\frac{1}{r^2}$인

등비급수이고 수렴하므로 $-1 < \frac{1}{r^2} < 1$, $r^2 > 1$

…… ㉡

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로
㉠, ㉡에서 $r = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} = \frac{\frac{a}{3}}{1-\frac{2}{3}} = a = 4$$

$a_n = 4\times 2^{n-1} = 2^{n+1}$이므로

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{1}} = \frac{1}{6}$$

[2023년 3월 (미적분) 27번]

5. $a_1=3$, $a_2=-4$인 수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$의 값은? [3점]

① -54 ② $-\frac{75}{2}$ ③ -24

④ $-\frac{27}{2}$ ⑤ -6

Analysis

"이 문제를 어떻게 풀지?"라고 생각하지 말고
"이 문제와 관련 있는 개념이 뭐지?"라고 생각하자.
수열의 합 S_n에 대한 단서가 나왔는데
일반항의 값 a_8을 구하라고 나왔어.
[관련개념]
$a_1=S_1$
$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

①

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}$에 $n=1$대입

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{6}{1+1}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{b_1}=3$

$\therefore b_1=1$

$\frac{a_2}{b_2}=\frac{6}{2+1}-\frac{6}{1+1}$

$\Leftrightarrow -\frac{4}{b_2}=2-3$

$\therefore b_2=4,\ d=3$

$\therefore b_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

$n\geq 2$일 때

$\frac{a_n}{b_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}-\frac{6}{n}=-\frac{6}{n(n+1)}$

$\therefore a_n=-\frac{6(3n-2)}{n^2+n}$ $(n\geq 2)$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{6(3n-2)^2}{n^2+n}\right\}=-54$

등비급수의 활용 (넓이)

[2023년 7월 (미적분) 27번]

6. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=\sqrt{17}$, $\overline{B_1C_1}=2$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AC_1 위의 점 C_2, 삼각형 AB_1C_1의 내부의 점 D_1을

$$\overline{B_1D_1}=\overline{B_2D_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{C_2D_1},$$

$$\angle B_1D_1B_2=\angle C_1D_1C_2=\frac{\pi}{2}$$

가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_1D_1B_2$, $C_1D_1C_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

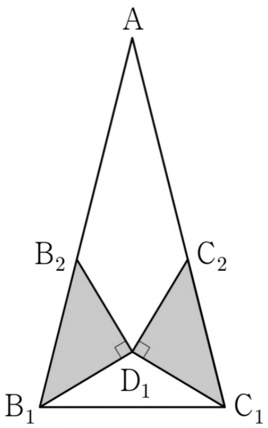
그림 R_1에서 선분 AB_2 위의 점 B_3, 선분 AC_2 위의 점 C_3, 삼각형 AB_2C_2의 내부의 점 D_2를

$$\overline{B_2D_2}=\overline{B_3D_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{C_3D_2},$$

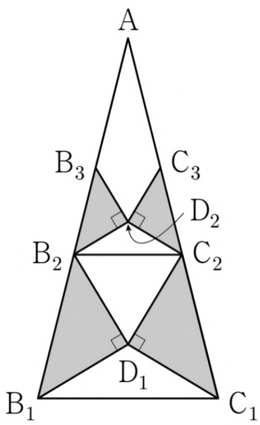
$$\angle B_2D_2B_3=\angle C_2D_2C_3=\frac{\pi}{2}$$

가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_2D_2B_3$, $C_2D_2C_3$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1



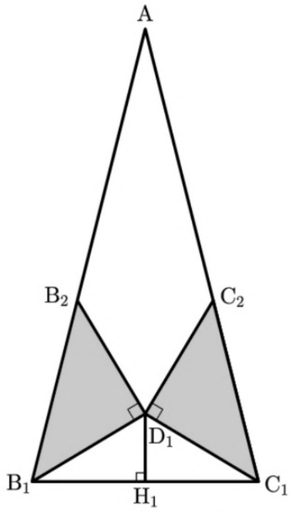
R_2

① 2 ② $\frac{33}{16}$ ③ $\frac{17}{8}$

④ $\frac{35}{16}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

교육청 해설

[정답] ③



점 D_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1, $\angle AB_1H_1=\alpha$, $\angle D_1B_1H_1=\beta$라 하자.

$\overline{AH_1}=\sqrt{17-1}=4$이므로 $\tan\alpha=4$

$\tan\beta=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{3}{5}$

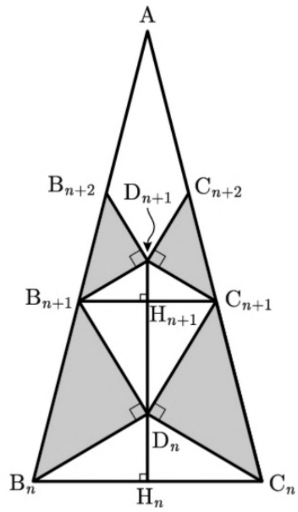
$\overline{B_1H_1}=1$, $\overline{D_1H_1}=\frac{3}{5}$이므로

$\overline{B_1D_1}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{5}$

$S_1=2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sNeutral{34}}{5}\right)^2\right\}=\frac{34}{25}$

…

…



점 D_n에서 선분 B_nC_n에 내린 수선의 발을 H_n, 점 D_{n+1}에서 선분 $B_{n+1}C_{n+1}$에 내린 수선의 발을 H_{n+1}이라 하자.

두 삼각형 $D_nB_nH_n$과 $B_{n+1}D_nH_{n+1}$은 서로

합동이므로

$\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}} = \overline{\mathrm{D}_n\mathrm{H}_n} = \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n} \times \tan\beta = \frac{3}{5}\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}$

두 삼각형 $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n\mathrm{B}_{n+1}$, $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{C}_{n+1}$로 만들어진

 모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

두 삼각형 $\mathrm{D}_n\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n$, $\mathrm{D}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}$은 서로

닮음이고 닮음비가 $1 : \frac{3}{5}$이므로

넓이의 비는 $1^2 : \left(\frac{3}{5}\right)^2$이다.

$T_{n+1} = \frac{9}{25}T_n$

수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1 = S_1 = \frac{34}{25}$이고 공비가

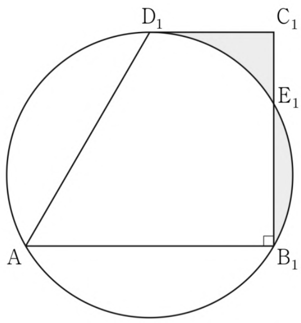
$\frac{9}{25}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{\frac{34}{25}}{1-\frac{9}{25}} = \frac{17}{8}$

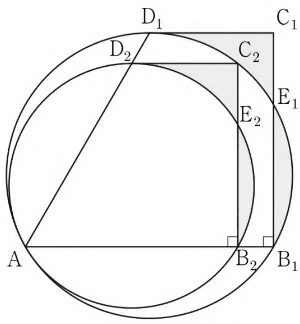
[2023년 4월 (미적분) 28번]

7. 다음 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=\sqrt{3}$, $\overline{C_1D_1}=1$이고 $\angle C_1B_1A=\frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_1C_1D_1$이 있다. 세 점 A, B_1, D_1을 지나는 원이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 B_1이 아닌 점을 E_1이라 할 때, 두 선분 C_1D_1, C_1E_1과 호 E_1D_1로 둘러싸인 부분과 선분 B_1E_1과 호 B_1E_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 호 E_1D_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{B_2C_2}:\overline{C_2D_2}=\sqrt{3}:1$이고 $\angle C_2B_2A=\frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$를 그린다.
그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 점 E_2를 잡고, 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



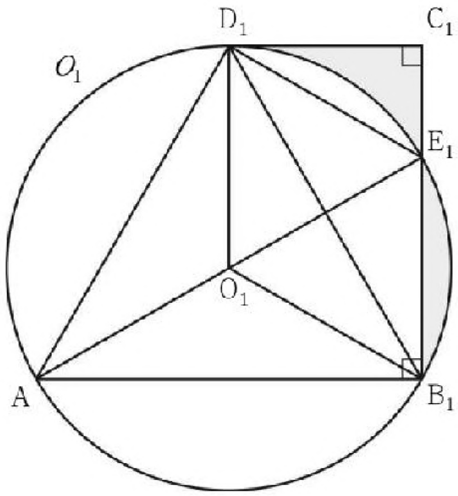
R_2



① $\frac{49}{144}\sqrt{3}$ ② $\frac{49}{122}\sqrt{3}$ ③ $\frac{49}{100}\sqrt{3}$ ④ $\frac{49}{78}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

교육청 해설

[정답] ④



$\overline{B_1C_1}=\sqrt{3}$, $\overline{C_1D_1}=1$, $\angle D_1C_1B_1=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{B_1D_1}=2$, $\angle D_1B_1A=\frac{\pi}{3}$

삼각형 AB_1D_1은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

삼각형 AB_1D_1의 외접원을 O_1이라 하면

$\angle E_1B_1A=\frac{\pi}{2}$이므로

선분 AE_1은 원 O_1의 지름이고

원 O_1의 반지름의 길이는 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$이다.

원 O_1의 중심을 O_1이라 하면

$\angle B_1AE_1=\frac{\pi}{6}$에서 $\angle B_1\mathrm{O}_1E_1=\frac{\pi}{3}$이고

$\overline{\mathrm{O}_1B_1}=\overline{\mathrm{O}_1E_1}$이므로

삼각형 $\mathrm{O}_1B_1E_1$은 정삼각형이다.

$$\begin{aligned}\overline{C_1E_1}&=\overline{B_1C_1}-\overline{B_1E_1}\\&=\overline{B_1C_1}-\overline{\mathrm{O}_1B_1}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

$\angle E_1\mathrm{O}_1D_1=\frac{\pi}{3}$이므로

두 부채꼴 $\mathrm{O}_1E_1D_1$, $\mathrm{O}_1B_1E_1$은 서로 합동이다.

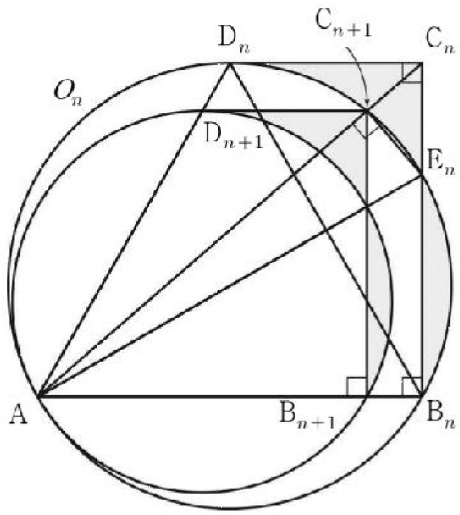
S_1은 삼각형 $E_1C_1D_1$의 넓이와 같으므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{C_1E_1}\times\overline{C_1D_1}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times1$

$=\frac{\sqrt{3}}{6}$

다음 그림은 R_{n+1}의 일부이다.



$\overline{C_nD_n}=a_n$이라 하면 $\overline{B_nC_n}=\sqrt{3}a_n$

직각삼각형 $B_nC_nD_n$에서 $\overline{B_nD_n}=2a_n$

$\angle D_nB_nA=\frac{\pi}{3}$, $\angle B_nAD_n=\angle B_1AD_1=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 AB_nD_n은 한 변의 길이가 $2a_n$인

정삼각형이다.

그러므로 $\overline{AB_n}=2a_n$

$\overline{C_{n+1}D_{n+1}}=a_{n+1}$이라 하면

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\sqrt{3}a_{n+1}$, $\overline{AB_{n+1}}=2a_{n+1}$

$\frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{AB_n}}=\frac{\overline{B_{n+1}C_{n+1}}}{\overline{AB_{n+1}}}$이므로

점 C_{n+1}은 직선 AC_n 위의 점이다.

그러므로

사다리꼴 $AB_nC_nD_n$과 사다리꼴

$AB_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은

서로 닮음이다.

직각삼각형 AB_nC_n에서

$\overline{AC_n}=\sqrt{\overline{AB_n}^2+\overline{B_nC_n}^2}$

$=\sqrt{7}a_n$

직각삼각형 $AB_{n+1}C_{n+1}$에서

$\overline{AC_{n+1}}=\sqrt{7}a_{n+1}$이므로

$\overline{C_nC_{n+1}}=\overline{AC_n}-\overline{AC_{n+1}}$

$=\sqrt{7}(a_n-a_{n+1})$

정삼각형 AB_nD_n의 외접원을 O_n이라 하면

$\angle E_nB_nA=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 AE_n은 원 O_n의

지름이다.

$\overline{B_nE_n}=\overline{AB_n}\times\tan\frac{\pi}{6}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}a_n$에서

$\overline{C_nE_n}=\overline{B_nC_n}-\overline{B_nE_n}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}a_n$

선분 AE_n을 지름으로 하는 반원에 대한

원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle AC_{n+1}E_n=\frac{\pi}{2}$

$\angle E_nC_{n+1}C_n=\pi-\angle AC_{n+1}E_n=\frac{\pi}{2}$

두 삼각형 C_nAB_n, $C_nE_nC_{n+1}$은 서로 닮음이므로

$\overline{AC_n}:\overline{E_nC_n}=\overline{B_nC_n}:\overline{C_{n+1}C_n}$

$\sqrt{7}a_n:\frac{\sqrt{3}}{3}a_n=\sqrt{3}a_n:\sqrt{7}(a_n-a_{n+1})$

$a_n^2=7a_n(a_n-a_{n+1})$

$7a_{n+1}=6a_n$

$a_{n+1}=\frac{6}{7}a_n$이므로

사다리꼴 $AB_nC_nD_n$과 사다리꼴

$AB_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의

닮음비가 7 : 6이고 넓이의 비는 49 : 36이다.

따라서

S_n은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{6}$이고 공비가 $\frac{36}{49}$인

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{36}{49}}$

$=\frac{49}{78}\sqrt{3}$

미적분

2. 여함미

PART B

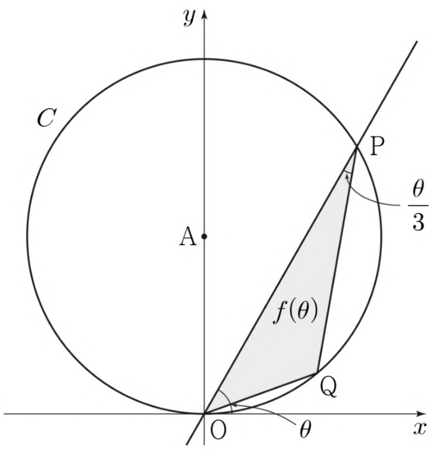
❋ 4점 ❋

(& 어려운 3점)

삼각함수의 미분

[2023년 4월 (미적분) 27번]

8. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $A(0, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선이 원 C와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 호 OP 위에 점 Q를 $\angle OPQ=\frac{\theta}{3}$가 되도록 잡는다. 삼각형 POQ의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? [3점]
(단, 점 Q는 제1사분면 위의 점이고, $0<\theta<\pi$이다.)



① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

교육청 해설

[정답] ③

원 C와 y축과의 교점 중 O가 아닌 점을 R라 하면

$\angle ORP=\frac{\pi}{2}-\angle POR=\theta$

직각삼각형 OPR에서 $\overline{OP}=2\sin\theta$

$\angle ORQ$, $\angle OPQ$는 호 OQ에 대한 원주각이므로

$\angle ORQ=\angle OPQ$

$=\frac{\theta}{3}$

직각삼각형 OQR에서 $\overline{OQ}=2\sin\frac{\theta}{3}$

$\angle QOP$, $\angle QRP$는 호 PQ에 대한 원주각이므로

$\angle QOP=\angle QRP$

$=\theta-\frac{\theta}{3}$

$=\frac{2}{3}\theta$

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}\times\sin(\angle QOP)$

$=\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times 2\sin\frac{\theta}{3}\times\sin\frac{2}{3}\theta$

$=2\sin\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2}{3}\theta$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2}{3}\theta}{\theta^3}$$

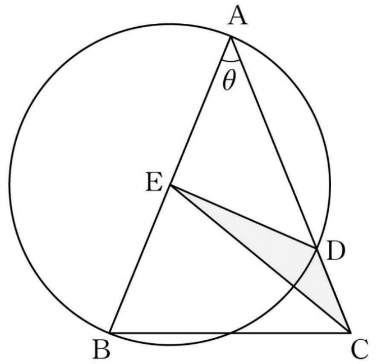
$$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}}\times\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\frac{2}{3}\theta}\right)$$

$$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 1=\frac{4}{9}$$

[2023년 10월 (미적분) 29번]

9. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 선분 AB의 중점을 E라 하자. $\angle BAC=\theta$일 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$60\times\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. [4점] $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



교육청 해설

[정답] 30

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 $\angle BAC=\theta$이므로

$\angle BCA=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$

점 D는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에

있으므로 $\angle BDA=\frac{\pi}{2}$

$\overline{CD}=\overline{BC}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\frac{\theta}{2}$

점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 AEH와 ABD는 서로 닮음이고 닮음비는 $1:2$이다.

$\overline{EH}=\frac{1}{2}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2}$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{EH}=\sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\cos\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 $60\times\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=30$

미적분
3. 미분법
PART B
❄ 4점 ❄
(& 어려운 3점)

그래프

[2023년 6월 (미적분) 27번]

10. 실수 t $(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t \to \pi-} \frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

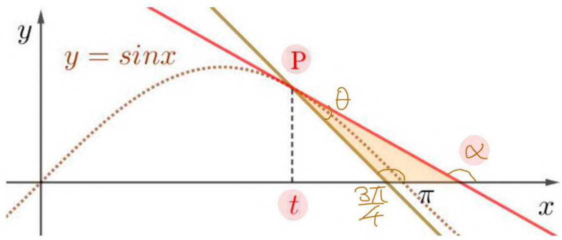
① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

③

기울기와 각도에 관련된 문제가 나오면? → tan활용!

기울기가 -1인 직선은 x축의 양의 방향이 이루는 각이 $\frac{3}{4}\pi$ $\left(\because \tan\frac{3}{4}\pi=-1\right)$



$y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, \sin t)$의 접선의 기울기는 $\cos t$

접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각을 α라 하면

$\cos t=\tan\alpha$

$\therefore \alpha=\theta+\frac{3}{4}\pi \Leftrightarrow \theta=\alpha-\frac{3}{4}\pi$

$$\tan\theta=\tan\left(\alpha-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{3}{4}\pi}{1+\tan\alpha\tan\frac{3}{4}\pi}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\cos t+1}{1-\cos t}$$

$\pi-t=x$라 하면 $t\to\pi-$일 때 $x\to 0+$

$\cos t=\cos(\pi-x)=-\cos x$

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}=\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}$$

[2023년 6월 (미적분) 26번]

11. x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8
④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

②

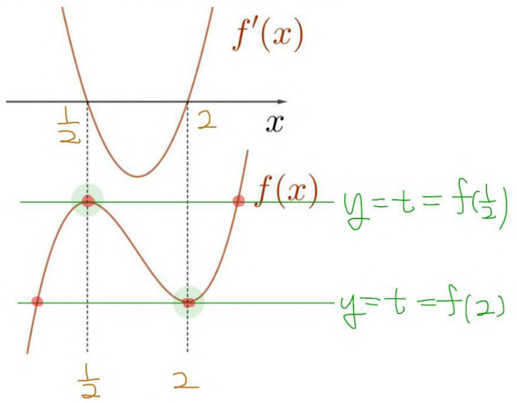
$f(x)=x^2-5x+2\ln x$라 하자.

$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}$

$=\frac{2x^2-5x+2}{x}$

$=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$

$x>0$이므로 $y=(2x-1)(x-2)$의 부호변화와 $f'(x)$의 부호변화가 동일하다.



$t=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}-2\ln 2$

$t=f(2)=-6+2\ln 2$

$\therefore$ 모든 실수 t의 값의 합은

$\left(-\frac{9}{4}-2\ln 2\right)+(-6+2\ln 2)=-\frac{33}{4}$

미적분
4. 적분법
PART B
❄ 4점 ❄
(& 어려운 3점)

치환적분과 부분적분

[2023년 10월 (미적분) 28번]

12. 함수

$$f(x) = \sin x \cos x \times e^{a\sin x + b\cos x}$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 서로 다른 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a-b$의 최솟값은? [4점]

(가) $ab=0$

(나) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{a^2+b^2} - 2e^{a+b}$

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

교육청 해설

[정답] ④

$a \neq b$이므로 조건 (가)에서

$a \neq 0$, $b=0$ 또는 $a=0$, $b \neq 0$

(i) $a \neq 0$, $b=0$일 때,

$\sin x = t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이고 $\frac{dt}{dx} = \cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x \times e^{a\sin x})dx$$

$$= \int_0^1 te^{at}dt = \left[\frac{t}{a}e^{at}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{a}e^{at}dt$$

$$= \frac{e^a}{a} - \left[\frac{1}{a^2}e^{at}\right]_0^1$$

$$= \frac{(a-1)e^a+1}{a^2}$$

조건 (나)에서 $\frac{(a-1)e^a+1}{a^2} = \frac{1}{a^2} - 2e^a$

$a-1 = -2a^2$, $(a+1)(2a-1)=0$

$a = -1$ 또는 $a = \frac{1}{2}$

(ⅱ) $a=0$, $b\neq 0$일 때,

$\cos x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때, $t=0$이고 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos x\times e^{b\cos x})dx$$

$$=-\int_1^0 te^{bt}dt=\int_0^1 te^{bt}dt$$

$$=\left[\frac{t}{b}e^{bt}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{b}e^{bt}dt$$

$$=\frac{e^b}{b}-\left[\frac{1}{b^2}e^{bt}\right]_0^1$$

$$=\frac{(b-1)e^b+1}{b^2}$$

조건 (나)에서 $\frac{(b-1)e^b+1}{b^2}=\frac{1}{b^2}-2e^b$

$b-1=-2b^2$, $(b+1)(2b-1)=0$

$b=-1$ 또는 $b=\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, -1)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

따라서 $a-b$의 최솟값은

$-1-0=-1$

[2023년 9월 (미적분) 27번]

13. $x=-\ln 4$에서 $x=1$까지의 곡선 $y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$의 길이는? [3점]

① $\frac{23}{8}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{29}{8}$

④ 4 ⑤ $\frac{35}{8}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

①

$f(x)=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$라고 하면

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(-e^x-e^{-x}+2) & (-\ln 4\leq x<0)\\ 0 & (0\leq x\leq 1)\end{cases}$$

∴ 곡선의 길이는

$$\int_{-\ln 4}^{1}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

$$=\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})}\,dx+\int_0^1\sqrt{1+0}\,dx$$

$$=\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})}\,dx+1$$

$$=\int_{-\ln 4}^{0}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx+1$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_{-\ln 4}^{0}+1$$

$$=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)+1$$

$$=\frac{15}{8}+1=\frac{23}{8}$$

미적분

1. 수열의극한

PART C

❄ 4점-고난도 ❄

수열의 극한 추론

[2023년 3월 (미적분) 29번]

14. 자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

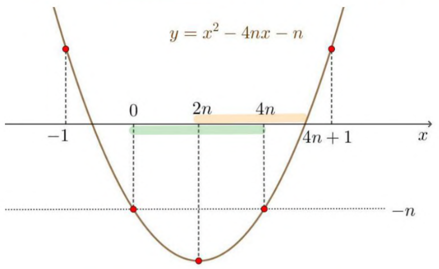
50

(step1) a_n 구하기

근의 공식에 의해

$x^2-4nx-n<0$

$\Leftrightarrow 2n-\sqrt{4n^2+n}<x<2n+\sqrt{4n^2+n}$



$2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+1$이므로

$\sqrt{4n^2+n}=2n+0.\mathrm{XX}$

정수 x는 $0\le x\le 4n$

$\therefore\ a_n=4n+1$

(step2) 계산하기

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+0}-pn)$

☆교체

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+\frac{1}{16}}-pn\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{4}-pn\right)$

수렴하므로 $p=2$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\cancel{2n}+\frac{1}{4}-\cancel{2n}\right)=\frac{1}{4}=q$

$\therefore\ 100pq=100\times2\times\frac{1}{4}=50$

[다른 풀이]

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-pn)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-p^2)n+1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+p}$

수렴하므로 $p=2$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}$

$\displaystyle=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}=q$

$\therefore\ 100pq=100\times2\times\frac{1}{4}=50$

Analysis

극한이기 때문에 상황만 잘 맞으면 아래와 같이 계산하는 것도 가능하다. 유리화보다 훨씬 편리하다.

$\sqrt{n^2+2an+b}\fallingdotseq\sqrt{n^2+2an+a^2}=n+a$

☆교체

그래프

[2023년 3월 (미적분) 30번]

15. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2\le|x|<2k$일 때,
> $g(x)=(2k-1)\times f\left(\dfrac{x}{2k-1}\right)$이다.
> (단, k는 자연수이다.)

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

25

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$에서

ⅰ) $|x|<1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$

$\therefore\ f(x)=-x$

ⅱ) $|x|=1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=1$

$\therefore\ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}=0$

ⅲ) $|x|>1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2n}=0$

$\therefore\ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-x\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=x$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-x & (|x|<1)\\ 0 & (|x|=1)\\ x & (|x|>1)\end{cases}$$

$$f\left(\frac{x}{2k-1}\right)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2k-1} & \left(\left|\dfrac{x}{2k-1}\right|<1 \Leftrightarrow |x|<2k-1\right)\\ 0 & \left(\left|\dfrac{x}{2k-1}\right|=1 \Leftrightarrow |x|=2k-1\right)\\ \dfrac{x}{2k-1} & \left(\left|\dfrac{x}{2k-1}\right|>1 \Leftrightarrow |x|>2k-1\right)\end{cases}$$

↓

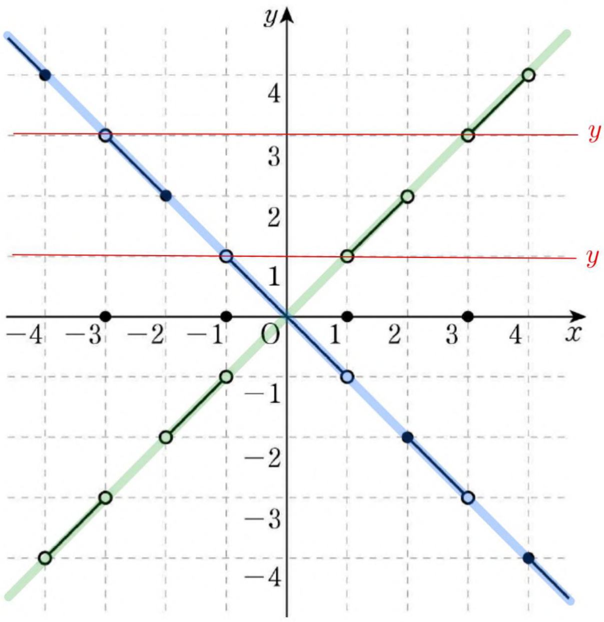
$$(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2k-1}\times(2k-1) & (|x|<2k-1)\\ 0 & (|x|=2k-1)\\ \dfrac{x}{2k-1}\times(2k-1) & (|x|>2k-1)\end{cases}$$

↓

짝 홀

$$g(x)=(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)=\begin{cases}-x & (2k-2\le|x|<2k-1)\\ 0 & (|x|=2k-1)\\ x & (2k-1<|x|<2k)\end{cases}$$

홀 짝



t가 홀수일 때 $y=t$는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않는다.

$\therefore$ 모든 t의 값의 합은

$1+3+5+7+9=25$

등비급수

[2023년 6월 (미적분) 30번]

16. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} -1 & (a_n \le -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3 = -1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

24

$|r| \ge 1$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$ or $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ or $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$가 수렴하지 않는다.

$\therefore\ -1 < r < 1$

$b_3 = -1$이므로 $a_3 \le -1$

$0 < r < 1$이면 a_n의 모든 항은 음수이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 8$ (양수)에 모순이다.

$\therefore\ -1 < r < 0$

$\therefore\ a_{2n-1} < 0,\ a_{2n} > 0$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = a_2 \underbrace{+}_{\times r^2} a_4 \underbrace{+}_{\times r^2} a_6 + \cdots = \dfrac{a_2}{1-r^2} = 8$

$a_5 \le -1$이면

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = b_1 + b_3 + b_5 + \cdots$

$= (-1) + (-1) + (-1) + \ominus + \cdots < -3$ 모순

$\therefore\ a_5 > -1$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = (-1) + (-1) + a_5 \overset{\times r^2}{+} a_7 \overset{\times r^2}{+} \cdots$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = -2 + \dfrac{a_5}{1-r^2} = -3 \Leftrightarrow \dfrac{a_5}{1-r^2} = -1$

$\dfrac{\dfrac{a_5}{1-r^2}}{\dfrac{a_2}{1-r^2}} = r^3 = -\dfrac{1}{8}$

$\therefore\ r = -\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{a_2}{1-r^2} = 8 \Leftrightarrow \dfrac{a_1\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = 8$

$\therefore\ a_1 = -12$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 12 \underbrace{+}_{\times|r|} 6 \underbrace{+}_{\times|r|} 3 + \cdots = \dfrac{12}{1-\dfrac{1}{2}} = 24$

$|r| = \dfrac{1}{2}$

미적분

2. 여함미

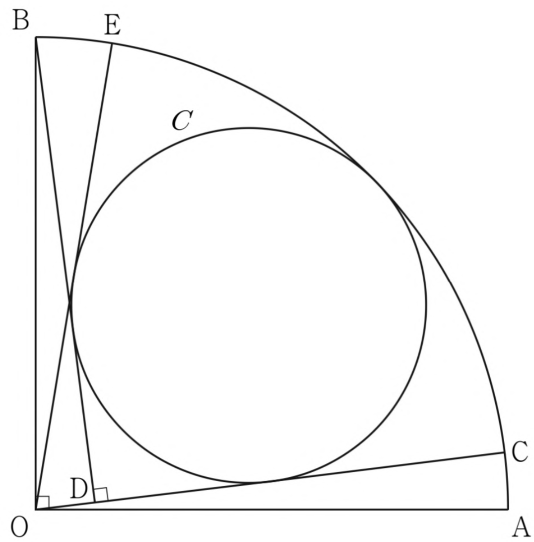
PART C

❄ 4점-고난도 ❄

삼각함수의 덧셈정리

[2023년 4월 (미적분) 29번]

17. 다음 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 두 선분 BD, CD와 호 BC에 동시에 접하는 원을 C라 하자. 점 O에서 원 C에 그은 접선 중 점 C를 지나지 않는 직선이 호 AB와 만나는 점을 E라 할 때, $\cos(\angle\mathrm{COE})=\frac{7}{25}$이다. $\sin(\angle\mathrm{AOE})=p+q\sqrt{7}$일 때, $200\times(p+q)$의 값을 구하시오. [4점]
(단, p와 q는 유리수이고, 점 C는 점 B가 아니다.)



교육청 해설

[정답] 79

원 C의 중심을 F라 하고 $\angle\mathrm{COF}=\alpha$라 하자.

$\angle\mathrm{COF}=\angle\mathrm{FOE}$이므로

$$\begin{aligned}\cos(\angle\mathrm{COE})&=\cos(\alpha+\alpha)\\&=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha\\&=2\cos^2\alpha-1=\frac{7}{25}\end{aligned}$$
에서

$\cos^2\alpha=\dfrac{16}{25}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5},\ \sin\alpha=\dfrac{3}{5}$

두 직선 BD, CD가 원 C와 접하는 점을 각각 G, H라 하자.

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{OF}}=8-r,\ \overline{\mathrm{FH}}=r$이므로

직각삼각형 OHF에서 $\sin\alpha=\dfrac{r}{8-r}=\dfrac{3}{5},\ r=3$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OH}}&=\overline{\mathrm{OF}}\times\cos\alpha\\&=5\times\frac{4}{5}\\&=4\end{aligned}$$

사각형 DHFG는 한 변의 길이가 3인 정사각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OD}}&=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{DH}}\\&=4-3\\&=1\end{aligned}$$

$\angle\mathrm{AOC}=\beta$라 하면

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{OBD}&=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{DOB}\\&=\angle\mathrm{AOC}\end{aligned}$$
이므로

삼각형 BOD에서 $\sin\beta=\dfrac{1}{8},\ \cos\beta=\dfrac{3}{8}\sqrt{7}$

또한
$$\begin{aligned}\sin2\alpha&=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}\\&=\frac{24}{25}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\angle\mathrm{AOE})&=\sin(2\alpha+\beta)\\&=\sin2\alpha\cos\beta+\cos2\alpha\sin\beta\\&=\frac{24}{25}\times\frac{3}{8}\sqrt{7}+\frac{7}{25}\times\frac{1}{8}\\&=\frac{7}{200}+\frac{9}{25}\sqrt{7}\end{aligned}$$
에서

$p=\dfrac{7}{200},\ q=\dfrac{9}{25}$

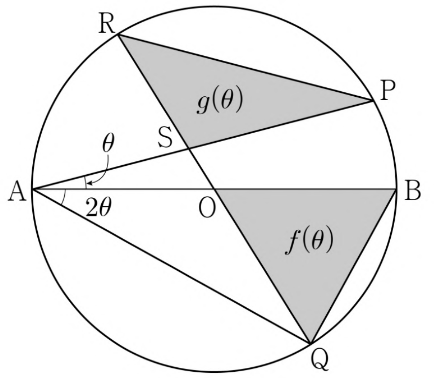
따라서

$$\begin{aligned}200\times(p+q)&=200\times\left(\frac{7}{200}+\frac{9}{25}\right)\\&=79\end{aligned}$$

[2023년 7월 (미적분) 28번]

18. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위에 점 P를 $\angle PAB = \theta$가 되도록 잡고, 점 P를 포함하지 않는 호 AB 위에 점 Q를 $\angle QAB = 2\theta$가 되도록 잡는다. 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R, 두 선분 PA와 QR가 만나는 점을 S라 하자. 삼각형 BOQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값은? [4점]

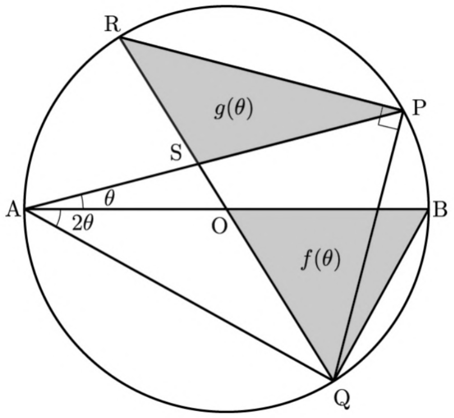
$\left(단,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}\right)$



① $\dfrac{11}{10}$ ② $\dfrac{6}{5}$ ③ $\dfrac{13}{10}$ ④ $\dfrac{7}{5}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

교육청 해설

[정답] ②



$\overline{OA} = \overline{OQ} = 1$이므로

$\angle OQA = 2\theta$, $\angle BOQ = 4\theta$

삼각형 BOQ의 넓이는

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OQ} \times \sin(\angle BOQ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 4\theta = \frac{1}{2} sin 4\theta$$

선분 RQ는 원의 지름이므로 $\angle RPQ = \dfrac{\pi}{2}$

원주각의 성질에 의하여 $\angle PRQ = \angle PAQ = 3\theta$

$\overline{RP} = \overline{RQ} cos\, 3\theta = 2\cos 3\theta$

원주각의 성질에 의하여 $\angle RPA = \angle RQA = 2\theta$

삼각형 PRS에서 $\angle PSR = \pi - 5\theta$

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{RS}}{\sin 2\theta} = \dfrac{2\cos 3\theta}{\sin(\pi - 5\theta)}$이므로

$$\overline{RS} = \frac{2\cos 3\theta \sin 2\theta}{\sin(\pi - 5\theta)} = \frac{2\cos 3\theta \sin 2\theta}{\sin 5\theta}$$

삼각형 PRS의 넓이는

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{RP} \times \overline{RS} \times \sin(\angle PRS)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\cos 3\theta \times \frac{2\cos 3\theta \sin 2\theta}{\sin 5\theta} \times \sin 3\theta$$

$$= \frac{2\cos^2(3\theta) \times \sin 2\theta \times \sin 3\theta}{\sin 5\theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\dfrac{2\cos^2(3\theta) \times \sin 2\theta \times \sin 3\theta}{\sin 5\theta}}{\dfrac{1}{2} sin 4\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{4\cos^2(3\theta) \times \sin 2\theta \times \sin 3\theta}{\sin 4\theta \times \sin 5\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{24 \times \cos^2(3\theta) \times \dfrac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \dfrac{\sin 3\theta}{3\theta}}{20 \times \dfrac{\sin 4\theta}{4\theta} \times \dfrac{\sin 5\theta}{5\theta}}$$

$$= \frac{6}{5}$$

미적분

3. 미분법

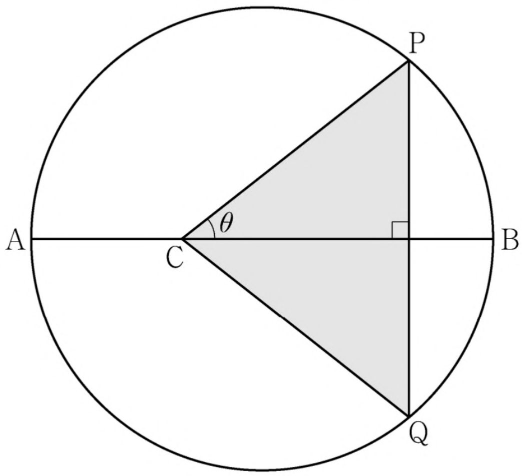
PART C

❄ 4점-고난도 ❄

삼각함수의 도함수

[2023년 9월 (미적분) 30번]

19. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle\mathrm{PCB}=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. [4점] $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

32

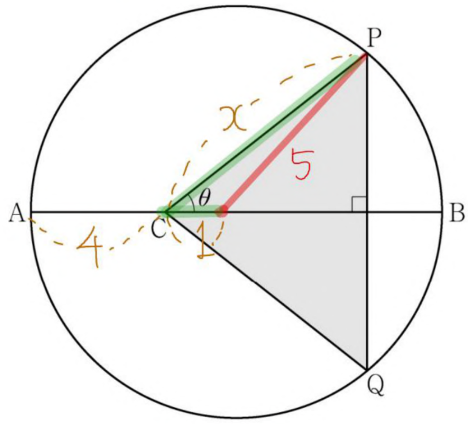
(step1) $S(\theta)$ 파악하기

$\overline{\mathrm{CP}}=x$라고 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}x^2\sin 2\theta$

$S'(\theta)=\frac{1}{2}\left(2x\frac{dx}{d\theta}\sin 2\theta+x^2\cos 2\theta\cdot 2\right)$

(step2) $\overline{\mathrm{CP}}=x$ 파악하기



$5^2=x^2+1^2-2x\cos\theta$

θ에 대하여 미분하면

$0=2x\frac{dx}{d\theta}-2\left\{\frac{dx}{d\theta}\cos\theta+x(-\sin\theta)\right\}$

(step3) $\theta=\frac{\pi}{4}$ 대입하기

$5^2=x^2+1^2-2x\cos\theta$

$\Leftrightarrow\ x^2-\sqrt{2}x-24=0$

$\therefore\ x=4\sqrt{2}$ or $\cancel{-3\sqrt{2}}$

$0=2x\frac{dx}{d\theta}-2\left\{\frac{dx}{d\theta}\cos\theta+x(-\sin\theta)\right\}$

$\Leftrightarrow\ 0=2\cdot 4\sqrt{2}\frac{dx}{d\theta}-2\left\{\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+4\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

$\therefore\ \frac{dx}{d\theta}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

$\therefore\ S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sqrt{2}\left(-4\frac{\sqrt{2}}{7}\right)+0=-\frac{32}{7}$

$\therefore\ -7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=32$

그래프

[2023년 6월 (미적분) 29번]

20. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$, $\mathrm{B}(b,\ b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k\neq 0$, $b+2k\neq 0$) [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

5

(step1) 수직 관계의 두 기울기의 곱=−1

양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-2y-2x\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}$$

{$\mathrm{A}(a,\ a+k)$에서의 접선 기울기}

×{$\mathrm{B}(b,\ b+k)$에서의 접선의 기울기}=−1

$$\frac{a-(a+k)}{a-2(a+k)}\times\frac{b-(b+k)}{b-2(b+k)}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{k}{a+2k}\times\frac{k}{b+2k}=-1$$

$$\therefore\ 5k^2+(a+b)2k+ab=0$$

(step2) 이제 ab와 a+b의 값을 구해야 한다

$x^2-2xy+2y^2=15$에 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$ 대입

$$a^2-2a(a+k)+2(a+k)^2=15$$

$$\therefore\ a^2+2ka+2k^2-15=0$$

$\mathrm{B}(b,\ b+k)$를 대입해도 같은 형태의 계산이 된다.

$$\therefore\ b^2+2kb+2k^2-15=0$$

$\therefore\ x^2+2kx+2k^2-15=0$의 두 근이 a, b가 된다!

근과 계수의 관계에 의해

$$a+b=-2k,\ ab=2k^2-15$$

$$5k^2+(a+b)2k+ab=0$$

$$\Leftrightarrow\ 5k^2-2k\cdot 2k+2k^2-15=0$$

$$\Leftrightarrow\ 3k^2=15$$

$$\therefore\ k^2=5$$

Analysis

'수직'이라는 조건이 나왔을 때 그냥 그 수직인 모양을 떠올리는 것에 머물지 말고 수직 조건을 어떻게
식으로 표현할지, 또는 수직의 도형의 성질을 어떻게 활용할지를 고민하는 논리적인 사고를 해야 한다.

[2023년 4월 (미적분) 30번]

21. $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases} 2^x - 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$

(나) 모든 양의 실수 x에 대하여

$f(x+2) = -\dfrac{1}{2}f(x)$이다.

$x > 0$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

라 할 때,

$$\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

교육청 해설

[정답] 107

조건 (나)에 의하여

$$f(x+2k)=-\frac{1}{2}f(x+2(k-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2 f(x+2(k-2))$$
$$\vdots$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^k f(x)\ (k\text{는 자연수})$$

자연수 m에 대하여

$2m-2 \leq x \leq 2m-1$일 때

$$f(x)=f(x-2(m-1)+2(m-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times f(x-2(m-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\{2^{x-2(m-1)}-1\}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\{2^{-2(m-1)}\times 2^x-1\}$$

$2m-1 < x \leq 2m$일 때

$$f(x)=f(x-2(m-1)+2(m-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times f(x-2(m-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2(m-1)}-1\right\}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\left\{2^{2m}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right\}$$

이므로

$2m-2 < x < 2m-1$에서

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times 2^{-2(m-1)}\times 2^x\ln 2$$

$2m-1 < x < 2m$에서

$$f'(x)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times 2^{2m}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln 2$$

자연수 l에 대하여

$2l-2 < x < 2l-1$ 또는 $2l-1 < x < 2l$일 때

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$$
$$=2f'(x)$$

$x=2l-1$일 때

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(2l-1+h)-f(2l-1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\left\{2^{2l}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-1+h}-1\right\}}{h}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\{2^{-2(l-1)}\times 2^{2l-1-h}-1\}}{h}\right]$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\times\lim_{h\to 0+}\frac{(2^{-h+1}-1)-(2^{-h+1}-1)}{h}$$
$$=0$$

$x=2l$일 때

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(2l+h)-f(2l-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l}(2^{-2l}\times 2^{2l+h}-1)}{h}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\left\{2^{2l}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-h}-1\right\}}{h}\right]$$

$$=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{l}\times\lim_{h\to0+}\frac{2^{h}-1}{h}$$

$$=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{l}\ln 2$$

이제 $\lim_{t\to0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln 2}{2^{24}}$를

만족시키는 자연수 n의 값을 n이 홀수일 때와

n이 짝수일 때로 나누어 구하면 다음과 같다.

(i) $n=2s-1$(s는 자연수)일 때

$$\lim_{t\to0+}g(n+t)=\lim_{t\to0+}g(2s-1+t)$$

$$=\lim_{t\to0+}2f'(2s-1+t)$$

$$=2\times\left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\right\}\times2^{2s}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2s-1}\ln 2$$

$$=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

$$\lim_{t\to0+}g(n-t)=\lim_{t\to0+}g(2s-1-t)$$

$$=\lim_{t\to0+}2f'(2s-1-t)$$

$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\times2^{-2(s-1)}\times2^{2s-1}\ln 2$$

$$=-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

그러므로

$$\lim_{t\to0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)$$

$$=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2-\left\{-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2\right\}+0$$

$$=16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

$$16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2=\frac{\ln 2}{2^{24}},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{s}=\left(\frac{1}{2}\right)^{28}$$

$s=28$이므로 $n=2\times28-1=55$

(ii) $n=2s$(s는 자연수)일 때

$$\lim_{t\to0+}g(n+t)=\lim_{t\to0+}g(2s+t)$$

$$=\lim_{t\to0+}2f'(2s+t)$$

$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\times2^{-2s}\times2^{2s}\ln 2$$

$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

$$\lim_{t\to0+}g(n-t)=\lim_{t\to0+}g(2s-t)$$

$$=\lim_{t\to0+}2f'(2s-t)$$

$$=2\times\left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\right\}\times2^{2s}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2s}\ln 2$$

$$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

그러므로

$$\lim_{t\to0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)$$

$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2+6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

$$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2$$

$$4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{s}\ln 2=\frac{\ln 2}{2^{24}},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{s}=\left(\frac{1}{2}\right)^{26}$$

$s=26$이므로 $n=2\times26=52$

(i), (ii)에 의하여

모든 자연수 n의 값의 합은 $55+52=107$

[2023년 7월 (미적분) 30번]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\sin|\pi f(x)|$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 함수 $g(x)$와 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=a_4$와 $x=a_8$에서 극대이다.
> (나) $f(a_m)=f(0)$

$f(a_k)\le f(m)$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

교육청 해설

[정답] 208

모든 자연수 n에 대하여

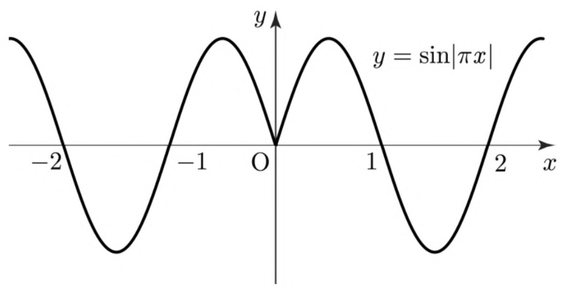
$g(a_n)=\sin|\pi f(a_n)|=0$이므로

$f(a_n)$의 값은 정수이다.

$$\cos\{\pi f(a_n)\}=\begin{cases}1 & (f(a_n)=2p)\\ -1 & (f(a_n)=2p-1)\end{cases}$$ (단, p는 정수)

…… ㉠

함수 $y=\sin|\pi x|$의 그래프는 그림과 같다.



$-1<x<0$ 또는 $0<x<1$일 때

$\sin|\pi x|>0$

$f(a_4)=0$이면 $g(a_4)=\sin|\pi f(a_4)|=0$이고,

$f(a_3)$과 $f(a_5)$의 값은 각각 -1 또는 0 또는 1

$a_3<x<a_4$ 또는 $a_4<x<a_5$일 때

$0<|f(x)|<1$이므로 $g(x)=\sin|\pi f(x)|>0$

함수 $g(x)$는 $x=a_4$에서 극대가 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(a_4)\ne 0$

함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 미분가능하고

조건 (가)에 의하여 $g'(a_4)=0$

$$g(x)=\begin{cases}\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)\ge 0)\\ -\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\ -\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g''(x)=\begin{cases}\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\} \\ \quad -\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\ -\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\} \\ \quad +\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

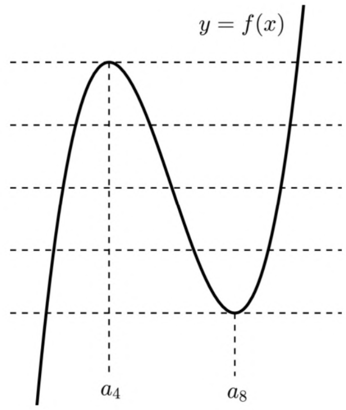
에서 $f'(a_4)=0$

위와 같은 방법으로 $f(a_8)\ne 0$이고 $f'(a_8)=0$

그러므로 $f'(x)=3(x-a_4)(x-a_8)$

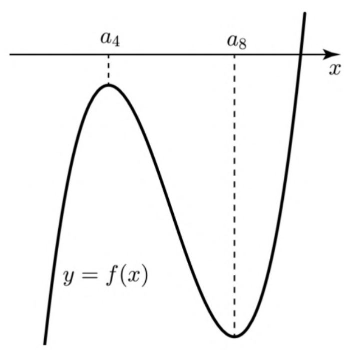
$f''(a_4)<0,\ f''(a_8)>0$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 $f(a_8)=f(a_4)-4$이다.

(i) $f(a_4)<0$인 경우



함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극대이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

$f''(a_4) < 0$이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\} < 0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\} = -1$

$f(a_4) = 2q+1$ (단, q는 음의 정수)

$f(a_8) = f(a_4) - 4 = 2q-3$에서

$\cos\{\pi f(a_8)\} = -1$이고

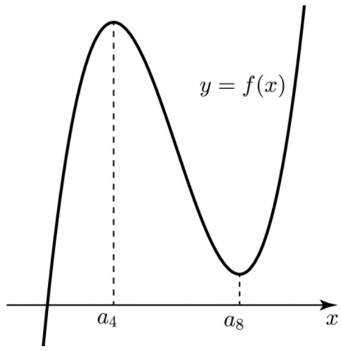
$f''(a_8) > 0$이므로

$g''(a_8) = -\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\} > 0$

함수 $g(x)$가 $x = a_8$에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $f(a_8) > 0$인 경우



함수 $g(x)$가 $x = a_8$에서 극대이므로

$g''(a_8) = -\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\} < 0$

$f''(a_8) > 0$이므로 $\cos\{\pi f(a_8)\} > 0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_8)\} = 1$

$f(a_8) = 2r$ (단, r는 자연수)

$f(a_4) = f(a_8) + 4 = 2r+4$에서

$\cos\{\pi f(a_4)\} = 1$이고

$f''(a_4) < 0$이므로

$g''(a_4) = -\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\} > 0$

함수 $g(x)$가 $x = a_4$에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $f(a_8) < 0 < f(a_4)$인 경우

$f(a_4) - 4 = f(a_8) < 0 < f(a_4)$이므로

$0 < f(a_4) < 4$

$f(a_4) = 1$ 또는 $f(a_4) = 2$ 또는 $f(a_4) = 3$

함수 $g(x)$가 $x = a_4$에서 극대이므로

$g''(a_4) = -\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\} < 0$

$f''(a_4) < 0$이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\} > 0$

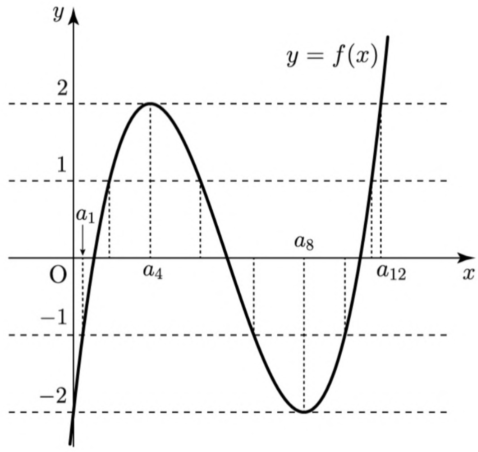
㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\} = 1$

$f(a_4) = 2s$ (단, s는 자연수)

그러므로 $f(a_4) = 2$이고 $f(a_8) = -2$

조건 (나)에 의하여 $f(a_8) = f(0) = -2$

$m = 8$



$f(x) = x(x-a_8)^2 - 2$

$f'(x) = (x-a_8)^2 + 2x(x-a_8) = 3(x-a_8)\left(x - \dfrac{a_8}{3}\right)$

$f'(a_4) = 0$에서 $a_4 = \dfrac{a_8}{3}$

$f(a_4) = a_4(a_4 - a_8)^2 - 2 = 2$이므로

$\dfrac{a_8}{3}\left(-\dfrac{2a_8}{3}\right)^2 - 2 = 2,\ a_8 = 3$

$f(x) = x(x-3)^2 - 2$

$f(m) = f(8) = 8 \times 5^2 - 2 = 198$이고

$k \geq 8$일 때 $f(a_k) = k - 10$이므로

따라서 $f(a_k) \leq f(8)$인 k의 최댓값은 208

[2023년 10월 (미적분) 30번]

23. 두 정수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다. (나) 함수 $\lvert f(x)\rvert$가 $x=k$에서 극대 또는 극소인 모든 k의 값의 합은 3이다.

$f(10)=pe^{-10}$일 때, p의 값을 구하시오. [4점]

교육청 해설

[정답] 91

$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+b)e^{-x}$

$\quad=-\{x^2+(a-2)x+b-a\}e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 모든 실수 x에 대하여

$e^{-x}>0$이므로 $x^2+(a-2)x+b-a=0$ …… ㉠

조건 (가)에서 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(a-2)^2-4(b-a)=a^2+4-4b>0$

$f(x)=0$에서 모든 실수 x에 대하여

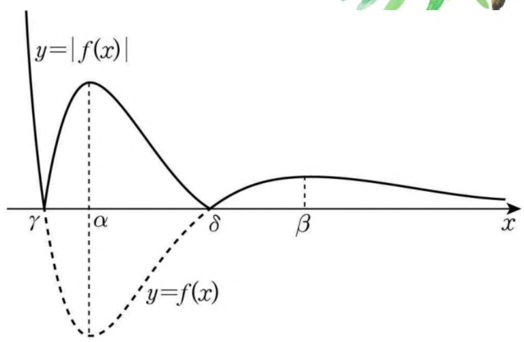
$e^{-x}>0$이므로 $x^2+ax+b=0$ …… ㉡

이차방정식 ㉡의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4b$

(i) $D_2>0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표를 γ, δ $(\gamma<\delta)$라 하면 함수 $y=\lvert f(x)\rvert$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

함수 $\lvert f(x)\rvert$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극대이고 $x=\gamma$, $x=\delta$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β와 이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근 γ, δ의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

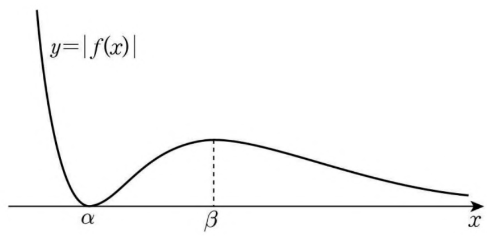
$(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=(2-a)+(-a)=3$

$a=-\dfrac{1}{2}$

이때 a는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $D_2=0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하고, 이 접점의 x좌표는 α이므로 함수 $y=\lvert f(x)\rvert$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

함수 $\lvert f(x)\rvert$는 $x=\beta$에서 극대이고 $x=\alpha$에서 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

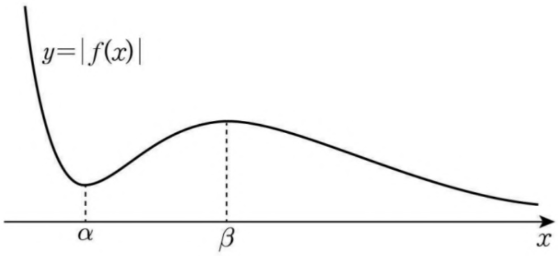
$\alpha+\beta=2-a=3$, $a=-1$

$D_2=(-1)^2-4b=0$, $b=\dfrac{1}{4}$

이때 b는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $D_2 < 0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

함수 $|f(x)|$는 $x=\beta$에서 극대이고 $x=\alpha$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2-a=3,\ a=-1$

$D_1=(-1)^2+4-4b>0,$

$D_2=(-1)^2-4b<0,\ b>\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{4}<b<\dfrac{5}{4}$이고 b는 정수이므로 $b=1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 정수 a, b의 값이 $a=-1,\ b=1$이므로

$f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$

따라서 $f(10)=(10^2-10+1)e^{-10}=91e^{-10}$이므로

$p=91$

[2023년 6월 (미적분) 28번]

24. 두 상수 a $(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$\{f(x)\}^2 + 2f(x) = a\cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b$이다.
(나) $f(0) = f(2) + 1$

① $-\dfrac{1}{16}$　② $-\dfrac{7}{64}$　③ $-\dfrac{5}{32}$
④ $-\dfrac{13}{64}$　⑤ $-\dfrac{1}{4}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

②

(step1) $f(0)$, $f(2)$ 파악하기

$f(0) = f(2) + 1$을 활용하기 위해

$x = 0$, $x = 2$ 대입하기

$\{f(0)\}^2 + 2f(0) = a + b$

$\{f(2)\}^2 + 2f(2) = a + b$

$\Leftrightarrow$ $\{f(0)\}^2 - \{f(2)\}^2 + 2\{f(0) - f(2)\} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\{f(0) - f(2)\}\{f(0) + f(2) + 2\} = 0$

$\Leftrightarrow$ $f(0) = f(2)$ or $f(0) + f(2) + 2 = 0$

$\therefore$ $f(0) + f(2) + 2 = 0$ ($\because$ $f(0) = f(2) + 1$)

$\therefore$ $f(0) = -\dfrac{1}{2}$, $f(2) = -\dfrac{3}{2}$

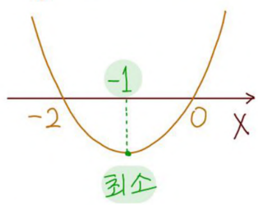
$\{f(0)\}^2 + 2f(0) = a + b$

$\Leftrightarrow$ $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = a + b$

$\therefore$ $a + b = -\dfrac{3}{4}$

(step2) $\{f(x)\}^2 + 2f(x)$의 최소 찾기

$y = X^2 + 2X$



$X = -1$에서 $y = X^2 + 2X$가 최솟값 -1을 가지므로

$f(x) = -1$에서 $\{f(x)\}^2 + 2f(x)$가 최솟값 -1을 가진다.

(step3) $a\cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b$의 최소 찾기

$\cos \pi x = t$ $(-1 \le t \le 1)$로 치환하여

$g(t) = at^3 e^{1-t^2} + b$의 최소 파악하기

$g'(t) = a\left\{3t^2 e^{1-t^2} + t^3 e^{1-t^2}(-2t)\right\}$

$= at^2 e^{1-t^2}(3 - 2t^2)$

$\therefore$ $-1 \le t \le 1$이므로 $g'(t) \ge 0$

$\therefore$ $t = \cos \pi x = -1$일 때 $g(t)$가 최솟값을 가진다.

$g(-1) = a(-1)^3 e^0 + b = -a + b$

$\therefore$ $-1 = -a + b$

$\therefore$ $a = \dfrac{1}{8}$, $b = -\dfrac{7}{8}$ ($\because$ $a + b = -\dfrac{3}{4}$)

$\therefore$ $a \times b = \dfrac{1}{8} \times \left(-\dfrac{7}{8}\right) = -\dfrac{7}{64}$

※ 함수 $f(x)$가 연속이고

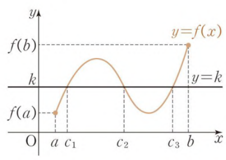
$f(0) = -\dfrac{1}{2}$, $f(2) = -\dfrac{3}{2}$이므로

사잇값정리에 의해 $f(x) = -1$의 근이 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

■ 사잇값 정리

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \ne f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 다음을 만족시키는 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

$$f(c) = k$$



미적분

4. 적분법

PART C

❄ 4점-고난도 ❄

치환적분과 부분적분

[2023년 7월 (미적분) 29번]

25. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x+4$이다.
> (나) $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$이다. (단, a, b는 상수이다.)

$\int_0^5 f(x)dx=pe^4-q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

교육청 해설

[정답] 12

조건 (가)에 의하여

$x<1$일 때

$f(x)=-x^2+4x+C$ (단, C는 적분상수)

조건 (나)에 의하여

$x>0$일 때

$2xf'(x^2+1)=2ae^{2x}+b$

$$f'(x^2+1)=\frac{2ae^{2x}+b}{2x}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 0+}f'(x^2+1)=\lim_{x\to 0+}\frac{2ae^{2x}+b}{2x}$$

$\lim_{x\to 0+}2x=0$이므로 $\lim_{x\to 0+}(2ae^{2x}+b)=0$

$2a+b=0$, $b=-2a$

$$f'(x^2+1)=\frac{2ae^{2x}+b}{2x}=\frac{2ae^{2x}-2a}{2x}$$

함수 $f'(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}f'(x)=\lim_{x\to 1+}f'(x)=f'(1)$

$\lim_{x\to 1-}f'(x)=-2+4=2$

$$\lim_{x\to 1+}f'(x)=\lim_{s\to 0+}f'(s^2+1)$$
$$=\lim_{s\to 0+}\frac{2a(e^{2s}-1)}{2s}=2a$$

$f'(1)=2$

$2=2a$, $a=1$, $b=-2$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=-1^2+4\times 1+C=C+3$

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{s\to 0+}f(s^2+1)$$
$$=\lim_{s\to 0+}(e^{2s}-2s)=1$$

$f(1)=1$

$C+3=1$이므로 $C=-2$

그러므로

$x<1$일 때, $f(x)=-x^2+4x-2$

$x\ge 0$일 때, $f(x^2+1)=e^{2x}-2x$

$$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(-x^2+4x-2)dx=-\frac{1}{3}$$

$\int_1^5 f(x)dx$에서

$x=t^2+1$ $(t\ge 0)$이라 하면 $\frac{dx}{dt}=2t$

$$\begin{aligned}\int_1^5 f(x)dx&=\int_0^2 f(t^2+1)2tdt\\&=\int_0^2 2t(e^{2t}-2t)dt\\&=\int_0^2(2te^{2t}-4t^2)dt\\&=\left[te^{2t}\right]_0^2-\int_0^2 e^{2t}dt-\int_0^2 4t^2dt\\&=\left[te^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{4}{3}t^3\right]_0^2\\&=\frac{3}{2}e^4-\frac{61}{6}\end{aligned}$$

$$\int_0^5 f(x)dx=\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}e^4-\frac{61}{6}\right)=\frac{3}{2}e^4-\frac{21}{2}$$

에서 $p=\frac{3}{2}$, $q=\frac{21}{2}$

따라서 $p+q=12$

그래프

[2023년 9월 (미적분) 28번]

26. 실수 a $(0 < a < 2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2|\sin 4x| & (x<0) \\ -\sin ax & (x \ge 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수

$$g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

Analysis

$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 꼴이 등장하면 꼭 해야 하는 것!

❶ $x=a$ 대입 : $g(a)=\int_a^a f(x)\,dx=0$

❷ 미분 : $g'(x)=f(x)$

Analysis

절댓값 함수의 미분 가능성

함수 $y=|f(x)|$에서

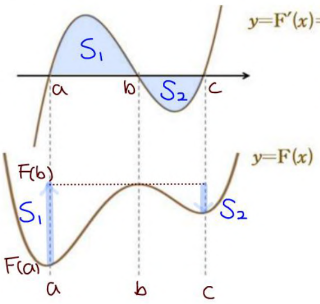
① $f(a)=0$

② $x=a$에서 미분가능

$\Rightarrow f'(a)=0$

Analysis

도함수의 넓이는 원시함수의 높이차



$\int_a^b f(x)\,dx$ $= F(a)-F(b)$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

②

$F(x)=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$라고 하면

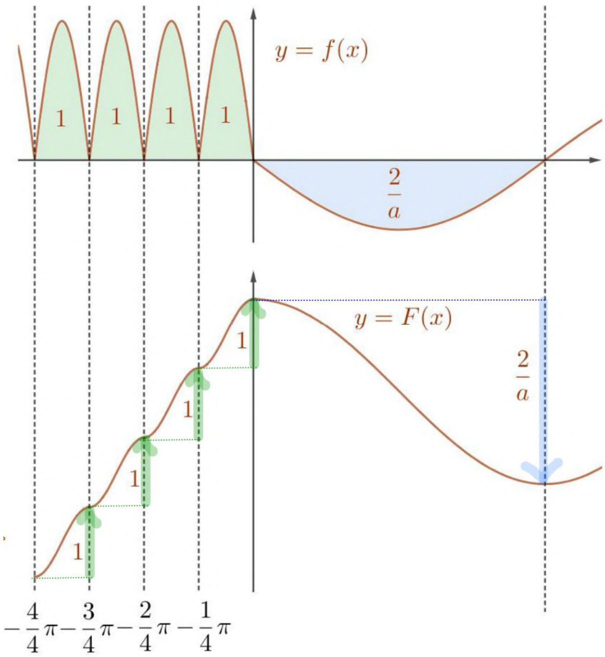
❶ $F(-a\pi)=0$

❷ $F'(x)=f(x)$

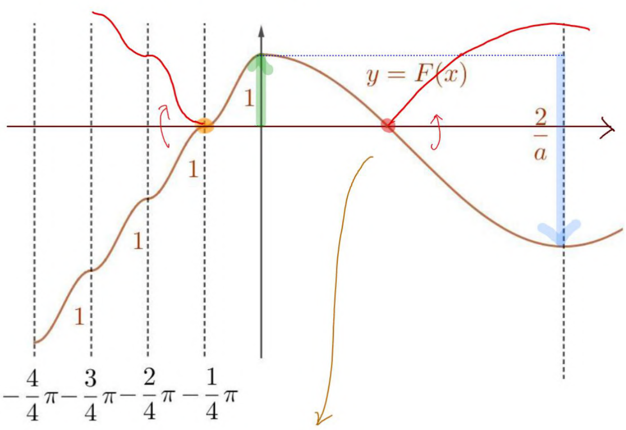
$g(x)=|F(x)|$이 실수 전체에서 미분가능하므로

$\Rightarrow F'(-a\pi)=f(-a\pi)=0$

$\therefore -a\pi=-\frac{\pi}{4},\ -\frac{2}{4}\pi,\ -\frac{3}{4}\pi,\ -\frac{4}{4}\pi,\ \cdots$

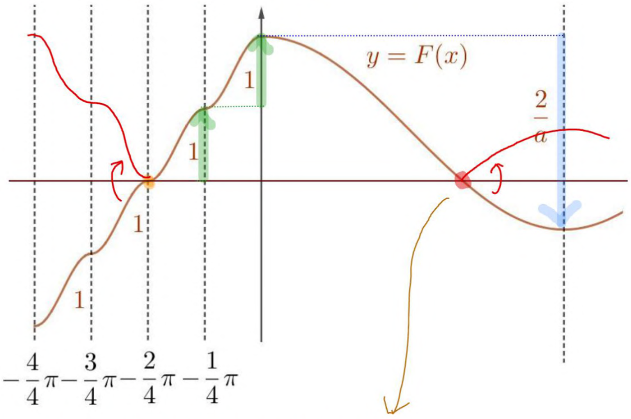


ⅰ) $-a\pi=-\frac{\pi}{4}$인 경우 $\frac{2}{a}=8>1$



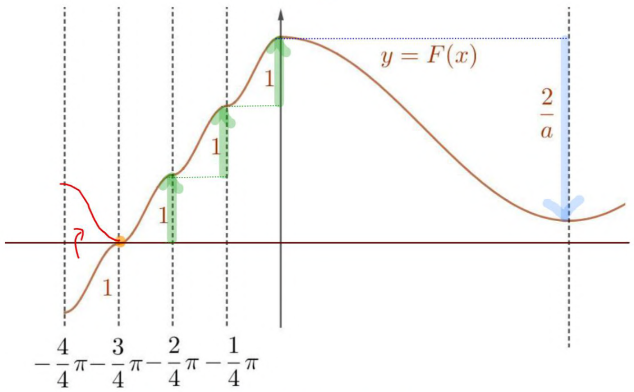
$\therefore$ $g(x)=|F(x)|$ 미분불가능한 점 존재

ii) $-a\pi = -\dfrac{2\pi}{4}$인 경우 $\dfrac{2}{a} = 4 > 2$



$\therefore$ $g(x) = |F(x)|$ 미분불가능한 점 존재

iii) $-a\pi = -\dfrac{3\pi}{4}$인 경우 $\dfrac{2}{a} = \dfrac{8}{3} < 3$



$\therefore$ $g(x) = |F(x)|$ 실수전체에서 미분 가능

$\therefore$ a의 최솟값은 $\dfrac{3}{4}$