SEASON 2024

8 주차

Re:좌표로 시작하는 기하 문풀

선택과목 **미적분/기하**

SEOL:NAME
THE SIGNATURE

설레임

테마별
기출분석집

설레임 모의고사
Team SeolName

08 Re:좌표로 시작하는 기하 문풀

기하 센스가 없다고? 좌표로라도 풀어보자!

STYLE 01

도형, 굳이 해석해야 할까? For Team 기하

도형 머리가 좋거나, 혹은 연습이 충분히 되었다면 기하적인 해석을 통해 도형 문제를 풀 수 있지.

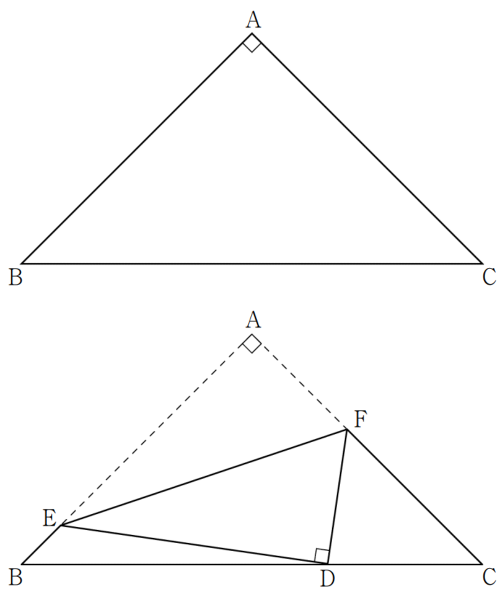
사실 그게 맞는 거야.

그런데 이 글을 쓰는 나도 그렇고, 도형 문제가 잘 안 풀리는 사람들도 어떻게든 풀어야겠지?

도형을 좌표평면에 잘 옮겨보자!

[2023학년도 6월 고2 전국연합학력평가 29번]

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$, $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC 모양의 종이가 있다. 선분 BC 위의 점 D, 선분 AB 위의 점 E, 선분 AC 위의 점 F에 대하여 선분 EF를 접는 선으로 하여 점 A가 점 D와 겹쳐지도록 접었다. 삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이의 비가 $2:1$일 때, 선분 DF의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



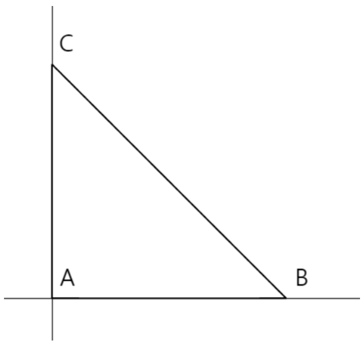
우리만의 실전 풀이

THINKING!

이제 와서 말하자면, 사실 좌표평면이 됐건, 좌표공간이 됐건 그 위에 도형을 올린다는 것이,
출제자가 원하는 풀이는 아니야. 오히려 싫어하겠지?
'내가 이렇게 공들여 만든 찬란한 문제들이…' 같은 생각을 하면서?
잡소리는 그만하고 본론만 말하면 계산이 더러워야 보통 정상이야.
계산이 깔끔하려면 그 과정에 대한 검토가 필요한데, 누가 이런 방법을 검토하겠어?
~~(물론 240913처럼 답이 안 깔끔할수도...)~~

STEP 1 **축을 그려라!**

가장 중요한 것은 축을 잡는 일이지. 삼각형 넓이 구할 때도, 어딜 밑변으로 두냐에 따라 계산이 완전 천차만별이라는 건 고1 내신 공부 좀 했으면 알거야.
다각형의 넓이를 구할 때 밑변이 x축이나 y축에 평행하게 만들 수 있다면 계산이 편하듯이, 얘도 비슷하게 하면 되는데 문제는 그게 어디냐는 거지.
이 문제에서 수직인 곳은 두 곳 보이지? $\angle \mathrm{EAF}$와 $\angle \mathrm{EDF}$ 이렇게 두 곳.
그런데 $\angle \mathrm{EDF}$를 x축과 y축의 교점으로 보면 조금 마음이 불편해져서, $\angle \mathrm{EAF}$를 원점으로 볼거야!
그럼 다음의 그림이 나오겠지?



다르게 축을 잡고 싶다면 딱히 상관없지만, 계산이 아마 조금 더 복잡해지겠지?
물론 좌표 자체가 계산이 하기 싫게 생겼지만, 계산 가뜩이나 복잡한데 더 복잡하게 만들 필요는 없으니까.

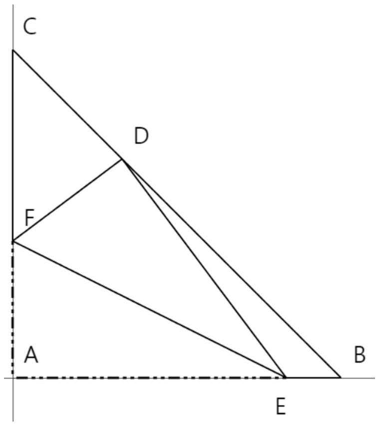
STEP 2 **좌표 끄적이기**

$\mathrm{B}(6,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 6)$**인 것** 정도는 당연히 구할 수 있을 거야.
문제는 점 D, E, F인데, 도형을 해석할 줄 모른다고 사인법칙, 코사인법칙도 모르는 건 말이 안되잖아?
그래서 일단 외접원의 반지름의 비를 바탕으로 다음과 같이 길이를 구할 수 있어야 돼.

$$\overline{\mathrm{DF}} = k\,,\ \ \overline{\mathrm{DE}} = 2k$$

$\triangle \mathrm{ABC}$는 직각이등변삼각형이니까, $\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C}$ 임을 이용하면 금방 구할 수 있지?

그러면 이제 E, F의 좌표도 구할 수 있을거야. $\mathrm{E}(2k,\ 0)$, $\mathrm{F}(0,\ k)$인 거지. **그림으로는 이렇게.**



직선 EF의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}x+k$인데, A를 이 직선에 대칭이동시켜야 하므로,

$y=-\dfrac{1}{2}x+k$와 $y=2x$의 교점 $\left(\dfrac{2}{5}k,\ \dfrac{4}{5}k\right)$를 구하면 $\mathrm{D}\left(\dfrac{4}{5}k,\ \dfrac{8}{5}k\right)$임을 알 수 있지.

점 D는 직선 $y=-x+2$위에 있는 점이므로, $k=\dfrac{5}{12}$임을 알 수 있고,

이제 좌표를 아니까 길이를 구하면, $\sqrt{\left(\dfrac{4}{5}k-0\right)^2+\left(\dfrac{8}{5}k-k\right)^2}=k=\dfrac{5}{12}$가 되겠지?

고2 문제이기도 하고, 사실 그렇게 어려운 문제는 아니야. 계산도 좌표로 풀었는데 깔끔한 편이고.
그렇지만 이건 드문 사례니까 계산은 아무리 더러워져도 조금 각오할 필요가 있어.
가장 중요한 건 **도형 보는 눈은 없어도 교과개념을 모르면 안된다**는 것이지.
좌표로 풀 수 있는 이유는 도형을 좌표로 옮길 수 있는 능력이 있기 때문이라는 걸 명심해!

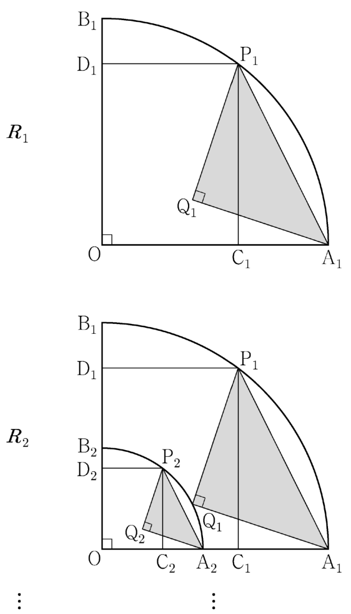
STYLE 02

어디로 가는지 몰라~ JUST 무! 등! 비! For Team 미적분

그분들한테 저격먹었는지 요즘 잘 안 보이는 무한등비급수의 활용 문제도 사실 좌표로 풀어버릴 수 있다?
어짜피 도형 해석이 필요하기 때문에, 좌표로 도형 해석을 대신할 수도 있는거지.

[2023학년도 대학수학능력시험 미적분 27번]

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_1}$이 있다. 호 $\mathrm{A_1B_1}$위에 점 $\mathrm{P_1}$, 선분 $\mathrm{OA_1}$위에 점 $\mathrm{C_1}$, 선분 $\mathrm{OB_1}$위에 점 $\mathrm{D_1}$을 사각형 $\mathrm{OC_1P_1D_1}$이 $\overline{\mathrm{OC_1}} : \overline{\mathrm{OD_1}} = 3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다. 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_1}$의 내부에 점 $\mathrm{Q_1}$을 $\overline{\mathrm{P_1Q_1}} = \overline{\mathrm{A_1Q_1}}$, $\angle \mathrm{P_1Q_1A_1} = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $\mathrm{P_1Q_1A_1}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 $\mathrm{OA_1}$위의 점 $\mathrm{A_2}$와 선분 $\mathrm{OB_1}$위의 점 $\mathrm{B_2}$를 $\overline{\mathrm{OQ_1}} = \overline{\mathrm{OA_2}} = \overline{\mathrm{OB_2}}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OQ_1}}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $\mathrm{OA_2B_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{Q_2}$를 잡고, 이등변삼각형 $\mathrm{P_2Q_2A_2}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

우리만의 실전 풀이

THINKING!

우리가 무등비로 줄여쓰는, 무한등비급수 문제는 보통 아래의 두 가지를 구해야 하지.

첫째항, 닮음비

이때 그냥 첫 번째 그림에서만 생각하고 말아버려. 이 원칙 자체는 어떻게 풀든 지켜진다고 봐야겠지?
다만 차이가 있다면, 도형을 생각하느냐? 숫자를 생각하느냐?
이 차이 뿐이야.

STEP 1 좌표 잡기

좌표를 잡기 위한 가장 중요한 작업은 아까도 말했듯이, x축과 y축 그리고 원점 이렇게 셋이야.
그런데 누가 봐도 자명하게 O를 원점으로 잡고, 직선 $\mathrm{OA_1}$을 x축으로, $\mathrm{OB_1}$을 y축으로 잡으면 되겠지?
따라서 주어진 도형은 $x^2+y^2=1\,(x>0,\ y>0)$이라 볼 수 있고, 문제에서 준 조건에 의해
$\mathrm{P_1}\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5}\right)$ 정도 까지도 알 수 있지.

↓

STEP 2 RHA 합동 삼각형 그리고 연립방정식

점 $\mathrm{Q_1}$에서 선분 $\mathrm{D_1P_1}$, $\mathrm{OA_1}$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면, 삼각형 $\mathrm{H_1Q_1P_1}$와 $\mathrm{H_2A_1Q_1}$은 RHA 합동임을 쉽게 알 수 있어! 수직이고, 문제에 의해 빗변 길이가 같고, 각은 직각이 많이 보이니까 같은 거 금방 확인할 수 있지?
그럼 이제 이런 생각을 해볼 수 있어.

$$\alpha=\overline{\mathrm{P_1H_1}},\ \beta=\overline{\mathrm{H_1Q_1}}\text{에 대해}$$

$$\mathrm{Q_1}\left(\frac{3}{5}-\alpha,\ \frac{4}{5}-\beta\right),\ \mathrm{A_1}\left(\frac{3}{5}-\alpha+\beta,\ \frac{4}{5}-\beta-\alpha\right)\text{라고 점의 좌표를 구한다.}$$

어? 그런데 $\mathrm{A_1}(1,\ 0)$인 거 기억나지? 이제 연립방정식을 풀면, $\alpha=\dfrac{1}{5}$, $\beta=\dfrac{3}{5}$에서 $\mathrm{Q_1}\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$지.

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2=\dfrac{1}{5}$인 걸 알 수 있고, $\overline{\mathrm{OQ_1}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이니까 넓이비는 $5:1$인 것까지 나오지.

이제 무한등비급수를 계산하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$가 답이 되겠지?

STYLE 02에서도 STYLE 01과 마찬가지로 큰 틀이 변하지는 않아. 여전히 알아야 할 건 알아야 하지. 행동강령이 바뀌는 것도 길이 바뀔 뿐, 출발지, 목적지, 주요경유지는 불변한다는 걸 기억해야 돼!

STYLE 03

기하지만 기하 없이 풀고 싶어! For Team 기하

사실 이 좌표 풀이를 나는 기하에서도 애용해.

적당히 원점 잡으면 위치벡터라는 개념을 활용해 좌표라고 생각하면 똑같거든?

해석하면 물론 좋지만, 시간도 없는데 언제 해석하겠어? 그치?

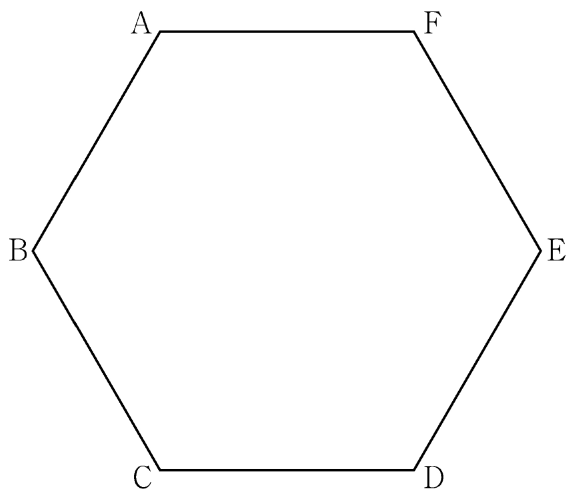
[2023학년도 6월 모의평가 기하 30번]

좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{CX}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{XA}} + \overrightarrow{\mathrm{XC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{XD}} = k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하시오. [4점]



우리만의 실전 풀이

THINKING!

기하도 기본적으로는 틀이 같아! 최소한 벡터들 가지고 내적 연산, 합 연산 정도는 할 줄 알아야겠지?
이것조차 하기 싫으면 미적분으로 도망넘어가면 돼! 물론 대학 때 다시 보게 될거야.
여하튼 원점을 잘 잡는게 진짜 중요한데, 이건 조금만 적용해봐도 금방 감을 잡을 수 있을 거라 생각해.

STEP 1 어이 김씨, 밑작업이나 해!

좌표평면 위에 도형을 올리기 전에 해야 할 일이 있지?
점들을 좌표에 대응시키기 위해, 길이나 각도를 좀 고정시켜 줄 필요가 있어.
우선 P와 Q를 살펴보면, P는 볼 게 딱히 없어. 그냥 궤적이 한 변의 길이가 4인 정육각형이다 정도?
Q도 사실 그 자체만은 큰 의미가 없는 게, 정말 말 그대로 점 C 중심의 반지름 1인 원 위에 있다는 거야.
의미를 파악했으니, 이 둘로부터 정의되는 X를 살펴보자.

$\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$는 C를 기준으로 정육각형을 절반으로 줄인 다음에,
그 정육각형을 따라 원을 움직이는 거지. 헷갈리면 C를 원점으로 잡고 생각해봐도 좋아.

어차피 이제부터 C는 원점으로 잡고 풀이할 예정이거든.

STEP 2 미지의 좌표 ㄷㄷㄷㅈ

우리가 정확히 좌표를 모르는 점은 셋 정도 있지만, 문제에 실질적으로 필요한 애는 X 하나지?
얘를 이제 $\mathrm{X}(x,\ y)$로 잡을거야. (나) 식을 벡터 합 연산을 통해 정리하면 좌변은 $(8-4x,\ 4\sqrt{3}-4y)$이고
우변은 $(4k,\ 0)$이지? 여기서 $y=\sqrt{3}$이라는 것을 알 수 있어.

y를 알아냈으니, x도 알아내야겠지?
그런데 X는 어떤 영역 위에 있는 점이라, x도 범위로써 나타내는 것이 한계야.
그거라도 해보면 $-2\leq x\leq 0$ 또는 $2\leq x\leq 4$여야 함을 알 수 있어.
$|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|=x^2+3$이니까, 최댓값은 $x=4$일 때이고, 최솟값은 $x=0$일 때라는 것도 바로 알 수 있지.
이때 k의 값은 각각 -2랑 2가 되니까, $\alpha^2+\beta^2=8$이 돼.

벡터에서 원점은 특히나 중요해! 다른 도형 문제들은 그래도 정해져 있었다면, 벡터에서는 미지수를 다뤄야 하는 일들이 발생하거든? 그래서 평면벡터 문제를 풀 때 좌표를 도입하고 싶다면, 원점을 어디에 둬야 계산이 편할지 최대한 궁리하는 편이 좋아.

★ STYLE 03 부록 - 삼각함수의 합의 최댓값, 최솟값

많이 볼 일은 없지만 가끔 다음의 식에 대한 최대/최소를 구해야 하는 경우가 있어.

$$a\sin x + b\cos x$$

이는 미적분에서 배우는 삼각함수의 덧셈정리를 활용하면 쉽게 구할 수 있는데, 우선 식을 다음과 같이 변형해볼게.

$$\sqrt{a^2+b^2}\times\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$이고, $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$이면서 동시에 $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$이므로, 각각을 다음과 같이 치환할 수 있어.

$$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

그러면 변형한 식을 또 다음과 같이 쓸 수 있지.

$$\sqrt{a^2+b^2}\times(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\times\sin(x+\theta)$$

수학I을 배웠으니, $-1\leq\sin(x+\theta)\leq 1$이라는 것 정도는 알 수 있고, 따라서 $-\sqrt{a^2+b^2}\leq a\sin x+b\cos x\leq\sqrt{a^2+b^2}$임을 어렵지 않게 보일 수 있어.

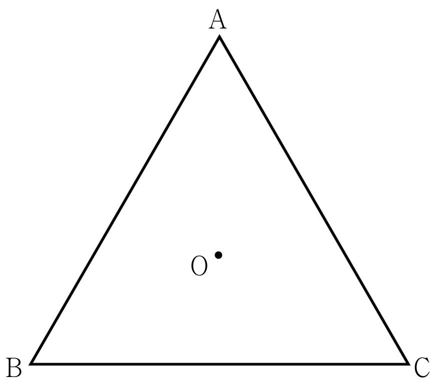
증명은 무시하더라도 결론은 알아두면 유용하니까 기억해두자!

★ STYLE 03 부록 - 미적분을 끼얹나...?

벡터 문제에 자주 등장하는 도형이 몇 개 있는데, 원도 그 중 하나야. 출제진들이 원 위를 움직이는 점을 참 좋아하지? 다음 문제를 같이 풀면서 원의 좌표도 잡아볼게!

| 2022학년도 7월 모의고사 기하 29번

평면 위에 한 변의 길이가 6 인 정삼각형 ABC 의 무게중심 O 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 를 만족시키는 점을 D 라 하자. 선분 CD 위의 점 P 에 대하여 $\left|2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}\right|$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P 를 Q 라 하자. $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$ 를 만족시키는 점 R 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ 의 최댓값이 $p+q\sqrt{93}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이다.) [4점]



점 R 을 생각한다면 원점은 O 가 되어야 해. 그렇게 했을 때 구해지는 좌표는 다음과 같아.

$$\mathrm{A}(0,\ 2\sqrt{3}),\ \mathrm{B}(-3,\ -\sqrt{3}),\ \mathrm{C}(3,\ -\sqrt{3}),\ \mathrm{D}(-6,\ -\sqrt{3}),\ \mathrm{Q}(-2,\ -\sqrt{3})$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$ 니까, R 은 O 를 중심으로 하고 반지름이 $2\sqrt{3}$ 인 원 위에 있는 거지? 얘를 $\mathrm{R}(2\sqrt{3}\cos\theta,\ 2\sqrt{3}\sin\theta)$ 이라고 잡을 거야.

그럼 주어진 내적 식은 $4\sqrt{3}\cos\theta+18\sin\theta+13$ 인데,
여기서는 미적분의 일부 교과서에 등장하는 식을 활용해 최댓값과 최솟값을 구할 수 있어. 결론만 말하면 $4\sqrt{3}\sin\theta+18\cos\theta$ 의 최댓값은 $\sqrt{(4\sqrt{3})^2+18^2}=\sqrt{372}=2\sqrt{93}$ 인데, 이 내용은 다른 부록에 후술할게.

그래서 주어진 내적의 최댓값은 $13+2\sqrt{93}$ 이고, 답은 15 가 되는 거지.

참고로 나는 미적분 내용까지는 좀 아닌 것 같다 싶으면, $\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{QO}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})$ 으로 분리해서 계산하면 돼. 분배법칙으로 전개했을 때, 앞의 항은 상수이고, 뒤의 항은 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 의 방향을 마음대로 설정할 수 있으니까 최댓값 구하기가 어렵지 않겠지?

STYLE 04

차원의 저주 For Team 기하

차원의 저주는 기계학습 쪽의 용어인데, 차원이 높아지면 데이터를 처리하기가 어려워진다는 내용이야.
그런데 우리도 3차원이 되면 머리가 고장나는 경우가 간혹 있지? "공간에서 뭔 좌표여?"하는 생각이 드는 건 이런 이유일거야. 그런데 기하에서는 좌표공간에 대해서도 배우지?
좌표공간을 잘 생각해보면 차원을 하나 낮출 수 있을 거야. 공간은 어떻게 좌표로 풀어야 할지 한 번 고민해보자.

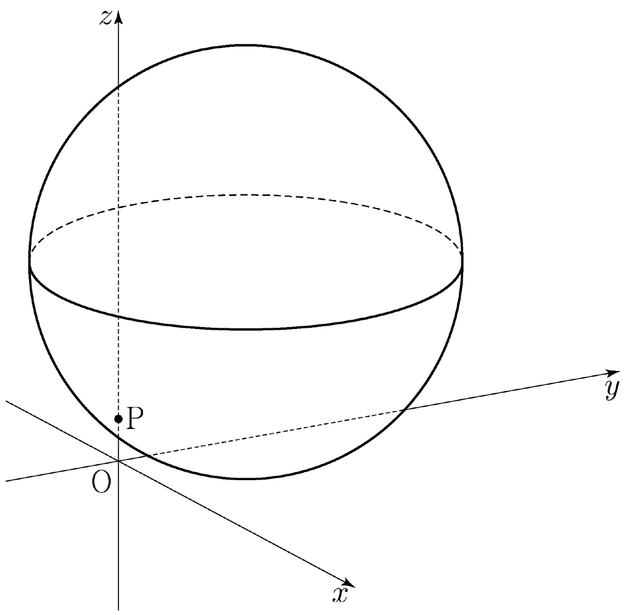
[2022학년도 대학수학능력시험 기하 30번]

좌표공간에 중심 $\mathrm{C}(2,\ \sqrt{5},\ 5)$이고 점 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 구

$$S:(x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고 세 점 O, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



우리만의 실전 풀이

THINKING!

공간은 평면과는 조금 궤가 달라져. 변수가 두 개일 때랑 세 개일 때랑 비교하면 당연히 후자가 더 복잡하지.
더군다나 나같이 기하적 센스가 부족한 사람은 정사영이 어렵기도 하단 말이지.
그래서 그냥 정사영을 좌표로 해결해버리면 편하겠지?

STEP 1 새로운 축

문제를 잘 읽어보면, 삼각형의 넓이가 최대가 되도록 Q, R을 정한 후 그 고정된 상태에 대한 정사영의 넓이를 구하면 돼. 그러니까 문제의 핵심은 삼각형의 넓이가 최대가 되어야 한다는 거야.
우선 평면 OPC를 생각해보자.
만약 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$이 아니라 $\mathrm{P}'(2,\ 0,\ 1)$이고 O 대신 $\mathrm{O}'(2,\ 0,\ 0)$이었다면 되게 구하기 쉬웠겠지?
세 점 모두 $x=2$를 지나니까 그냥 이 평면이 우리가 구하고자 하는게 되었 을거야.
그런데 지금 푸는 문제여도 크게 다르지 않아. 우선 O와 P로부터 $x=y=0$인 직선이 평면에 포함되어야 함을 알 수 있어. 즉 xy평면에 수직인 평면이라는거지.
이제 점 C의 xy평면 위로의 정사영 C'을 생각해보면, 직선 OC'도 평면 OPC에 포함되어야 하지.
따라서 우리가 구하는 평면의 방정식을 구하면 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$가 됨을 알 수 있어.
그런데 사실 z의 값은 아무 값이나 취해도 전혀 문제가 없잖아?
그래서 x축과 y축 대신 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$축과 z축으로 생각하는거야.
이러면 이제 축이 셋에서 둘로 줄어드니까,

↓

STEP 2 두 변수

축은 이제 둘로 줄었으니 넓이가 최대가 되게 하는 점을 쉽게 구할 수 있을 거야.
Q를 좌표로 나타내면 $\mathrm{Q}(2t,\ \sqrt{5}t,\ z)$인데, 점 R은 구면 위의 점이므로 R이 평면 OPC와 가장 멀리 떨어져 있어야 하기 때문에, Q도 원점에서 가장 멀리 떨어져 있어야 해. $3t$의 값이 최대가 되어야 하니까,
$z=5$일 때 선분 OQ의 길이가 8이 되겠지. 점 R은 전술한 이유 때문에 $\begin{cases} z=5 \\ y=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}x+\dfrac{9}{\sqrt{5}} \end{cases}$ 와 구 S의 두 교점 중 하나가 되고, $\mathrm{R}\left(2\pm\dfrac{5}{3}\sqrt{5},\ \sqrt{5}\mp\dfrac{10}{3},\ 5\right)$으로 정리할 수 있어.
점 P의 평면 CQR 위로의 정사영을 $\mathrm{P}'(0,\ 0,\ 5)$라 하면, 삼각형 PQR의 평면 CQF로의 정사영의 넓이는 $y=(9-4\sqrt{5})x-48+24\sqrt{5}$와 P' 사이의 거리와 $\overline{\mathrm{QR}}$의 곱의 절반이 되겠지?

따라서 다음과 같이 넓이를 구할 수 있어.

$$\frac{|48-24\sqrt{5}|}{\sqrt{162-72\sqrt{5}}}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{8(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{18-8\sqrt{5}}}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{8(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=20$$

그리고 삼각형 PQR 의 넓이는 같은 방식으로 구하면 다음과 같아.

$$\sqrt{(4\sqrt{2})^2+4^2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{6}$$

그럼 이면각 θ 에 대해 $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이 성립할 것이고, 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$ 의 넓이는 삼각형 $\mathrm{P'QR}$ 의 넓이인 20 과 같으니까, $20\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{20}{3}\sqrt{6}$ 에서 $p+q=23$ 이 돼.

중간에 교육과정에서 사라진 이중근호가 나오는데, 좌표로 계산하는 이상 각오해야 할 일이야.
이미 미적분 내용도 한 번 썼으니까 이해할 수 있겠지? 그래도 부록으로 한 번 다뤄볼게!

공간도형은 차원이 세 개가 되면서 평면보다도 훨씬 복잡해지는 경향이 있어. 이를 해결하기 위해서는 위에서 했던 것처럼 축을 두 개로 줄여버리거나, 좌표를 하나 고정하고 생각해 어떻게든 평면 상에서 문제를 해결해야 해. 좌표로 푼다면 당연히 점과 직선의 거리 같은 식도 잘 알고 있어야 할 거야.

★ STYLE 03 부록 - 근호 안의 근호

사실 내용은 다들 얼추 알거야. $\sqrt{p\pm q\sqrt{r}}$ 꼴의 식을 $\sqrt{m}\pm\sqrt{n}$ 꼴로 고치는 거지.
원리도 사실 어렵지는 않아.
우선 $\sqrt{p\pm q\sqrt{r}}=\sqrt{m}\pm\sqrt{n}$ 이 된다고 믿고, 제곱을 취할 거야. 복부호 쓰기는 귀찮으니까 부호는 같아야 하는 것만 알고 있어. 이제부터는 $(-)$ 로 쓸거야.

$$p-q\sqrt{r}=m+n-2\sqrt{mn}$$

$q=2q'$ 이라 하면, 다음과 같이 처리할 수 있어.

$$p-2\sqrt{q'^2r}$$

그럼 $p=m+n$, $q'^2r=mn$ 이니까, m, n 을 근으로 갖는 이차방정식을 생각해볼 수 있을 거야.
우리가 방금 푼 문제에서는 $\sqrt{18-8\sqrt{5}}=\sqrt{18-2\sqrt{80}}$ 을 풀어야 하니, $x^2-18x+80=0$ 의 두 근인 10, 8 이 각각 m 과 n 이 되는 거지.

다만 유의할 점은, 굳이 $(-)$로 부호를 설명한 이유와 연관되는데, 등식을 잘 보면 좌변이 양수지? 우변도 양수이기 위해서는 $m>n$ 이어야 한다는 점을 꼭 유념해야해.

SEOL:NAME, The Signature [테크닉 총정리]

CHECK 01 좌표평면 위에 올려놓기

도형이 좌표평면 위에 그려져 있는 경우도 있지만, 그렇지 않아서 좌표평면 위에 올려야 좌표로 해석할 수 있는 경우가 있다. 이런 때에는 **원점을 어디에** 잡을지, **x축과 y축은 어떤 방향으로** 뻗어야 편할지 생각해보자.

CHECK 02 무한등비급수와 좌표

무한등비급수 문제의 핵심은 **첫째항**과 **닮음비** 구하기이다. 도형의 성질을 구하는 대신 좌표를 활용하는 것 뿐이므로, 그 외의 것에 대해서는 여전히 잘 숙지해야 한다. 또한 원점을 잘 잡아야 계산이 그나마 편할 것이라는 거나, 합동인 직각삼각형을 통해 각 좌표의 차를 쉽게 나타낼 수 있는 등도 알아두면 좋다.

CHECK 03 기하 없는 기하 문풀

벡터 문제를 풀 때에도 좌표를 응용하는 것은 그렇게 어려운 일이 아니다. 위치 벡터와 대응될 수 있기 때문이다. 다만 종전의 도형 문제들과 다른 점은 미지수가 등장하다보니 원점의 위치가 중요해진다는 것이다. 함수식 내지는 방정식을 깔끔하게 완성하기 위한 위치를 잘 고민하는 것은 좌표 풀이에 있어서 핵심이라고 할 수 있다.

CHECK 04 미적분을 끼얹나...?

일부 교과서에 등장하는 $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$ 는 삼각함수의 덧셈정리를 이용해 증명이 가능하다. 요즘에는 보기 드물긴 하나, 좌표 풀이를 잘 사용하기 위해서는 알아두면 좋은 원리이므로 함께 알아두자.

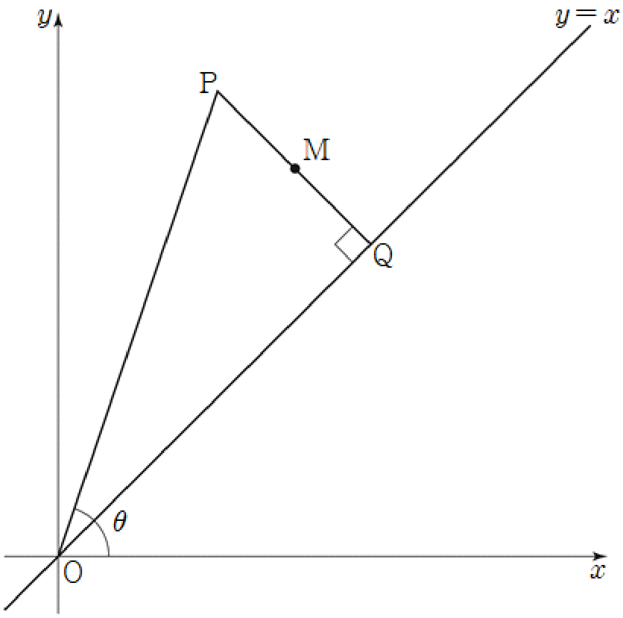
CHECK 05 차원의 저주

3차원은 너무 복잡해 처리하기에 가끔 어려워지기도 한다. 이럴 때에, 계산은 더러울 수도 있겠지만, 좌표를 적극적으로 기용할 수 있다. 두 축을 하나로 합쳐 처리하거나, 한 축에 대한 좌표를 고정하는 등이 그 예가 된다. 복잡한 계산만 실수 없이 해낸다면 큰 아이디어 없이도 해낼 수 있다. 이중근호 같은 것도 위의 부록을 참고하면 어렵지 않게 할 수 있기 때문이다.

PRACTICE
기출문제 ATTACK

001 [2015학년도 4월 B형 20번] **미적분**

그림과 같이 원점 O로부터의 거리가 1인 점 P에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ $\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 점 P에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 선분 PQ의 중점을 M이라 하자. 점 M의 y좌표가 최대일 때, $\tan\theta$의 값은? [4점]



① 2　② $\frac{7}{3}$　③ $\frac{8}{3}$　④ 3　⑤ $\frac{10}{3}$

002 [2021학년도 9월 미적분 27번] **미적분**

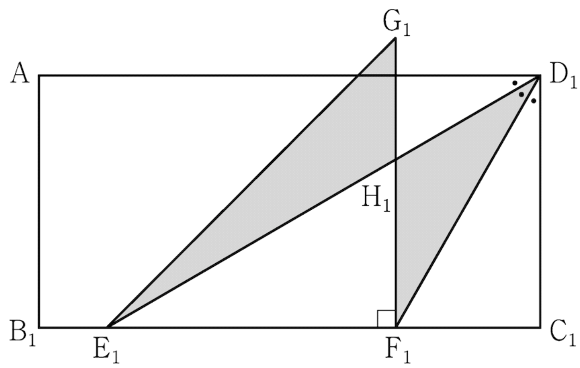
그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자.

$\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1과 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다. 선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

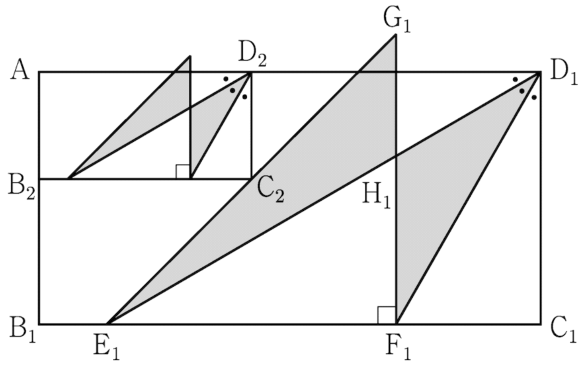
그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



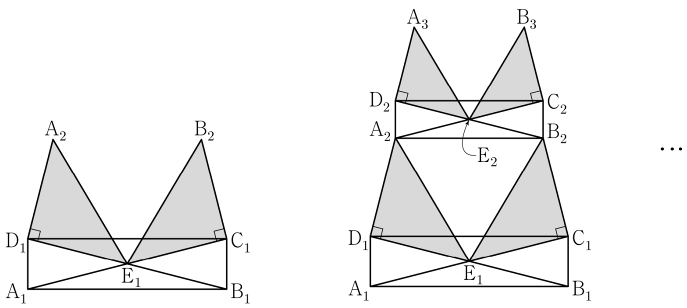
⋮ ⋮

① $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{18}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

003 [2022학년도 9월 미적분 27번] **미적분**

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자. $\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다. 두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1　　　R_2　　　…

① $\frac{68}{5}$　　② $\frac{34}{3}$　　③ $\frac{68}{7}$　　④ $\frac{17}{2}$　　⑤ $\frac{68}{9}$

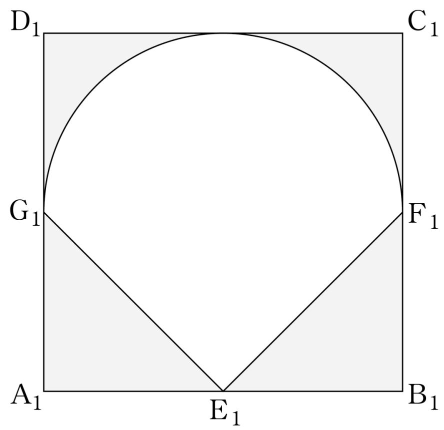
004 [2018학년도 10월 나형 19번] 미적분

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 세 변 A_1B_1, B_1C_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1이라 하자. 선분 G_1F_1을 지름으로 하고 선분 D_1C_1에 접하는 반원의 호 G_1F_1과 두 선분 G_1E_1, E_1F_1로 둘러싸인 모양의 도형의 외부와 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부의 공통부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

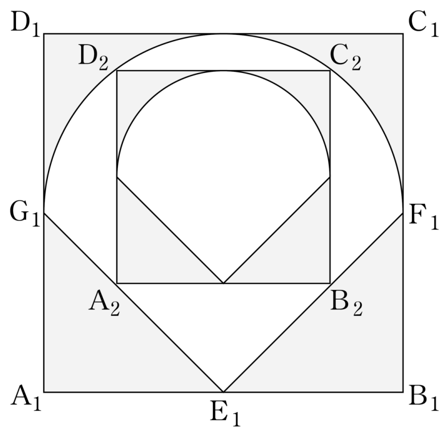
그림 R_1에서 선분 G_1E_1 위의 점 A_2, 선분 E_1F_1 위의 점 B_2와 호 G_1F_1 위의 두 점 C_2, D_2를 꼭짓점으로 하고 선분 A_2B_2가 선분 A_1B_1과 평행한 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 그린 모양의 도형의 외부와 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부의 공통부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



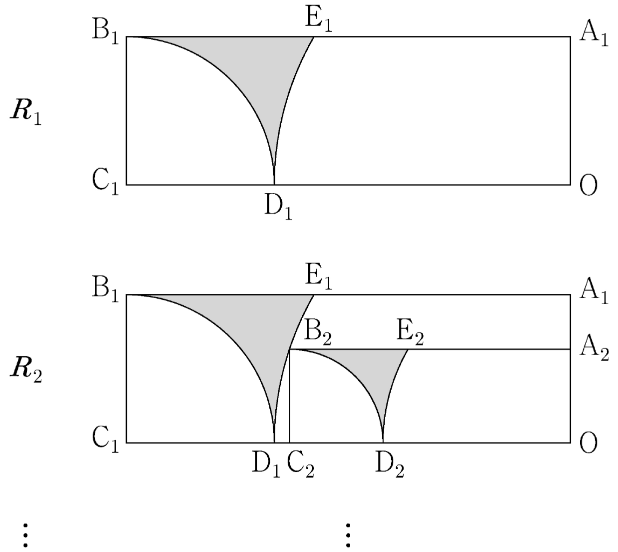
⋮ ⋮

① $\dfrac{25(6-\pi)}{42}$ ② $\dfrac{25(6-\pi)}{32}$ ③ $\dfrac{25(6-\pi)}{24}$

④ $\dfrac{25(6-\pi)}{21}$ ⑤ $\dfrac{5(6-\pi)}{4}$

005 [2019학년도 9월 나형 19번] 미적분

그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=3$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=1$ 인 직사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ 이 있다. 중심이 $\mathrm{C_1}$ 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{B_1C_1}}$ 인 원과 선분 $\mathrm{OC_1}$ 의 교점을 $\mathrm{D_1}$, 중심이 O 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OD_1}}$ 인 원과 선분 $\mathrm{A_1B_1}$ 의 교점을 $\mathrm{E_1}$ 이라 하자. 직사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ 에 호 $\mathrm{B_1D_1}$, 호 $\mathrm{D_1E_1}$, 선분 $\mathrm{B_1E_1}$ 로 둘러싸인 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에 선분 $\mathrm{OA_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$ 와 호 $\mathrm{D_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{OD_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$ 와 점 O 를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}:\overline{\mathrm{B_2C_2}}=3:1$ 인 직사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$ 에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



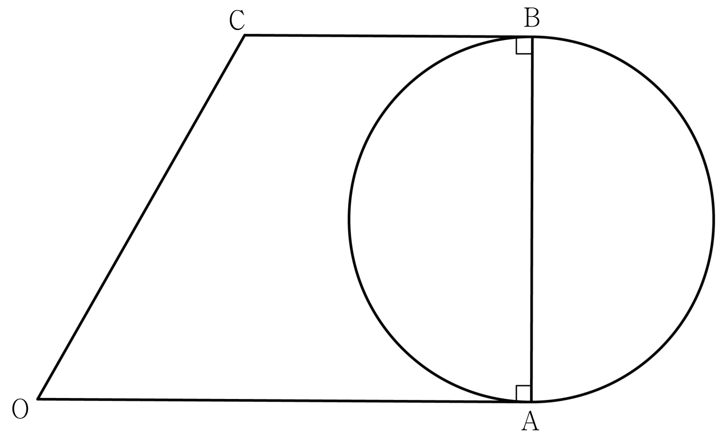
① $4-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{7}{9}\pi$
② $5-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}-\dfrac{35}{36}\pi$
③ $6-\sqrt{3}-\dfrac{7}{6}\pi$
④ $7-\dfrac{7\sqrt{3}}{6}-\dfrac{49}{36}\pi$
⑤ $8-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{14}{9}\pi$

006 [2021학년도 7월 30번] 기하

평면 위에

$$\overline{\mathrm{OA}} = 2 + 2\sqrt{3}, \quad \overline{\mathrm{AB}} = 4, \quad \angle \mathrm{COA} = \frac{\pi}{3}, \quad \angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{B} = \frac{\pi}{2}$$

를 만족시키는 사다리꼴 OABC가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 D라 하자. 원 위의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{DQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}}$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]



007 [2020학년도 6월 가형 29번]

기하

좌표평면에서 곡선

$$C:\ y=\sqrt{8-x^2}\ \ (2\le x\le 2\sqrt{2})$$

위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}=2$, $\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}$를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자.

점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자.

영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.) [4점]

008 [2019학년도 6월 가형 29번] **기하**

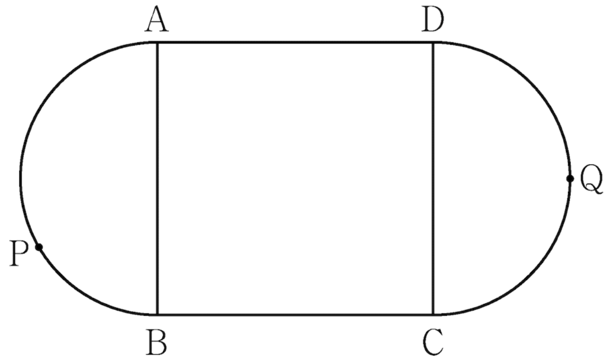
좌표평면 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=5$ 인 두 점 A, B 를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인 두 원을 각각 O_1, O_2 라 하자. 원 O_1 위의 점 C 와 원 O_2 위의 점 D 가 다음 조건을 만족시킨다.

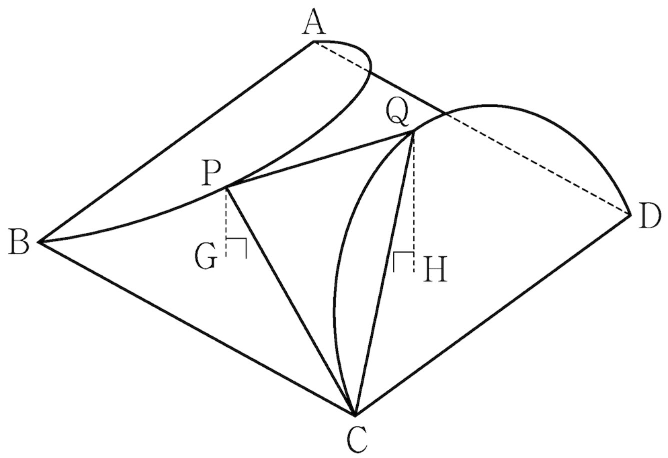
(가) $\cos(\angle\mathrm{CAB})=\dfrac{3}{5}$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=30$ 이고 $\lvert\overrightarrow{\mathrm{CD}}\rvert<9$ 이다.

선분 CD 를 지름으로 하는 원 위의 점 P 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ 의 최댓값이 $a+b\sqrt{74}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]

009 [2022학년도 9월 기하 29번] 기하

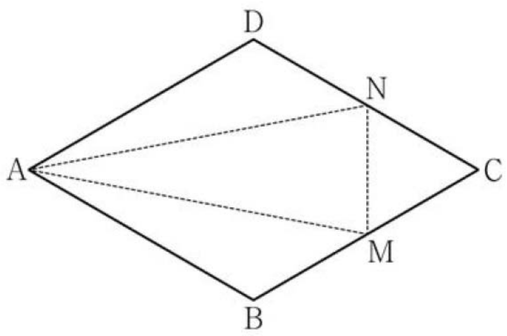
그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자. 이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{\mathrm{PG}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{QH}}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오.
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]

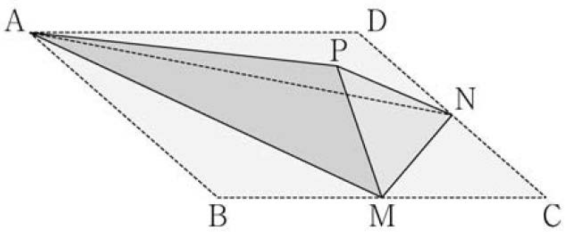




010 [2020학년도 대학수학능력시험 가형 27번] 기하

그림과 같이 한 변의 길이가 4이고 $\angle \mathrm{BAD}=\frac{\pi}{3}$인 마름모 ABCD 모양의 종이가 있다. 변 BC와 변 CD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 세 선분 AM, AN, MN을 접는 선으로 하여 사면체 PAMN이 되도록 종이를 접었다. 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며 P는 종이를 접었을 때 세 점 B, C, D가 합쳐지는 점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





기출문제 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

1	④	2	③	3	③	4	②	5	②
6	108	7	24	8	31	9	40	10	8

해 설

001

[정답] ④

점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$

직선 $y=x$가 x축과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$

$\angle \mathrm{POQ}=\theta-\frac{\pi}{4}$이므로

직각삼각형 OQP에서

$\overline{\mathrm{OQ}}=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\overline{\mathrm{OQ}}\cos\frac{\pi}{4}, \overline{\mathrm{OQ}}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}, \cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right)$이므로

점 M의 y좌표는

$\frac{1}{2}\left\{\sin\theta+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\sin\theta+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(\theta+\alpha)\ \left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\sin(\theta+\alpha)=1$, 즉 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$일 때

점 M의 y좌표는 최댓값을 갖는다.

따라서

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=3$$

002

[정답] ③

직각삼각형 $C_1D_1F_1$에서

$\angle C_1D_1F_1 = \frac{\pi}{6}$, $\overline{C_1D_1} = 1$이므로

$\overline{C_1F_1} = \overline{C_1D_1} \times \tan\frac{\pi}{6} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 $C_1D_1E_1$에서 $\angle C_1D_1E_1 = \frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{C_1E_1} = \overline{C_1D_1} \times \tan\frac{\pi}{3} = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$

이때,

$\overline{E_1F_1} = \overline{C_1E_1} - \overline{C_1F_1} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 $\overline{E_1F_1H_1}$에서 $\angle H_1E_1F_1 = \frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{F_1H_1} = \overline{E_1F_1} \times \tan\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$

$S_1 = \triangle E_1F_1G_1 + \triangle E_1F_1D_1 - 2 \times \triangle E_1F_1H_1$

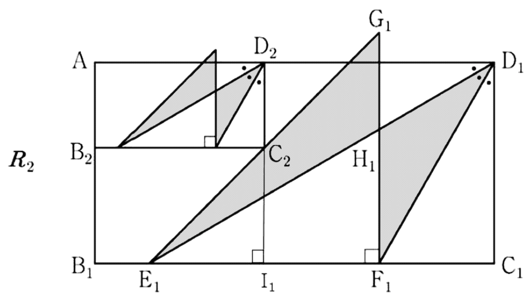
$= \frac{1}{2} \times \overline{E_1F_1} \times \overline{F_1G_1} + \frac{1}{2} \times \overline{E_1F_1} \times \overline{C_1D_1} - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{E_1F_1} \times \overline{F_1H_1}\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 1 - 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{3}\right)$

$= \frac{6-\sqrt{3}}{9}$

한편 $\overline{AB_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : 2$이므로

$\overline{AB_2} = k$, $\overline{B_2C_2} = 2k$ $(k > 0)$이라 하자.



점 C_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면

$\overline{E_1I_1} = \overline{C_2I_1} = 1 - k$, $\overline{I_1C_1} = 2 - 2k$이므로

$(1-k) + (2-2k) = \sqrt{3}$

$k = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

그림 R_1에 색칠되어 있는 도형과 그림 R_2에 새로 색칠되어 있는 도형의 닮음비가 $1 : \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$이므로

넓이의 비는 $1 : \dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 구하는 극한값은 첫째항이 $\dfrac{6-\sqrt{3}}{9}$이고, 공비가 $\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\dfrac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$$

003

[정답] ③

$\overline{\mathrm{B_1D_1}} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$ 이므로

$\overline{\mathrm{D_1E_1}} = \overline{\mathrm{C_1E_1}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$, $\overline{\mathrm{A_2E_1}} = \overline{\mathrm{B_2E_1}} = \dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$

$\therefore \triangle \mathrm{A_2D_1E_1} = \triangle \mathrm{B_2C_1E_1} = \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \dfrac{17}{8}$

$\angle \mathrm{C_1A_1B_1} = \alpha$ 라 하면 $\angle \mathrm{D_1E_1A_1} = 2\alpha$이고

$\angle \mathrm{A_2E_1D_1} = \angle \mathrm{B_2E_1C_1} = \dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$\angle \mathrm{A_2E_1B_2} = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$ 이므로

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{8}{17}$

$\therefore \overline{\mathrm{A_2B_2}}^2 = \dfrac{17}{2} + \dfrac{17}{2} - 2\times\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{8}{17} = 9$

$\therefore \overline{\mathrm{A_2B_2}} = 3$

그림 R_1의 색칠된 도형의 넓이는 $2\times\dfrac{17}{8} = \dfrac{17}{4}$이고, 그림 R_1의 색칠된 도형과 그림 R_2에 추가되는 색칠된 도형의

닮음비는 $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{3}{4}$이므로 등비급수의 공비는 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$이다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\dfrac{17}{4}}{1-\dfrac{9}{16}} = \dfrac{68}{7}$$

004

[정답] ②

그림 R_n에서 새로 색칠된 부분의 넓이를 a_n 이라 하자.

그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 넓이에서 반지름의 길이가 1 인 반원의 넓이와 직각이등변삼각형 $\mathrm{G_1E_1F_1}$ 의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$a_1 = 2^2 - \left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2} \times 2 \times 1\right) = \dfrac{1}{2}(6-\pi)$

그림 R_2에서 선분 $\mathrm{G_1F_1}$의 중점을 O, 선분 $\mathrm{G_1F_1}$과 선분 $\mathrm{B_2C_2}$의 교점을 H라 하고 선분 OH의 길이를 x라 하면

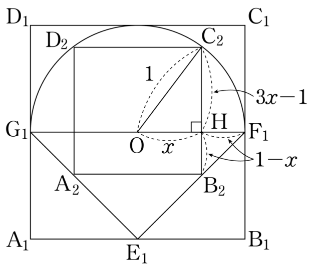
$\overline{\mathrm{HB_2}} = \overline{\mathrm{HF_1}} = 1-x$, $\overline{\mathrm{C_2H}} = 2x-(1-x) = 3x-1$ 이므로

삼각형 $\mathrm{OHC_2}$에서 $1^2 = x^2 + (3x-1)^2$, $x = \dfrac{3}{5}$

두 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$, $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 닮음비는 $1 : \dfrac{3}{5}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 a_n$ 이 성립한다.

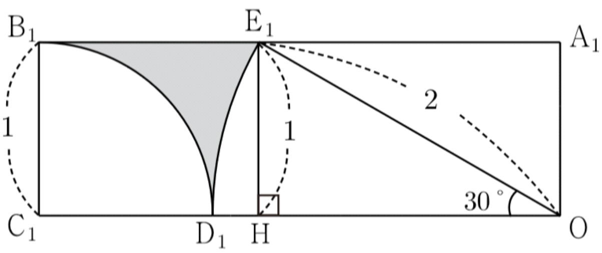
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}(6-\pi)$ 이고 공비가 $\dfrac{9}{25}$ 인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{1}{2}(6-\pi)}{1-\frac{9}{25}} = \frac{25(6-\pi)}{32}$$



005

[정답] ②

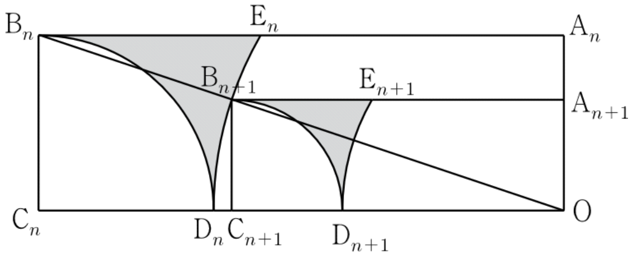


점 $\mathrm{E_1}$에서 선분 $\mathrm{C_1O}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 $\mathrm{E_1HO}$에서 $\overline{\mathrm{E_1H}} = 1$, $\overline{\mathrm{E_1O}} = 2$이므로 $\angle \mathrm{E_1OH} = 30^\circ$ 이다.

S_1은 직사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$에서 부채꼴 $\mathrm{C_1B_1D_1}$, 부채꼴$\mathrm{OE_1D_1}$, 삼각형 $\mathrm{E_1OA_1}$을 제외한 부분의 넓이이므로

$S_1 = 3 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$이다.



두 직사각형 $\mathrm{OA_nB_nC_n}$과 $\mathrm{OA_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}}$서로 닮은 사각형이다.

닮음비가 $\overline{\mathrm{OB}_n} : \overline{\mathrm{OB}_{n+1}} = \sqrt{10} \times \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n} : 2 \times \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n} = \sqrt{10} : 2$이므로

넓이의 비는 $10 : 4 = 5 : 2$가 된다.

따라서 S_n은 첫째항이 $S_1 = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{12}\pi$이고

공비가 $\frac{2}{5}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{12}\pi}{1 - \frac{2}{5}} = 5 - 5\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{35}{36}\pi$$

006

[정답] 108

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 E라 하자.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OE}} + \overrightarrow{\mathrm{EP}}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EP}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}}$의 값은 일정하므로

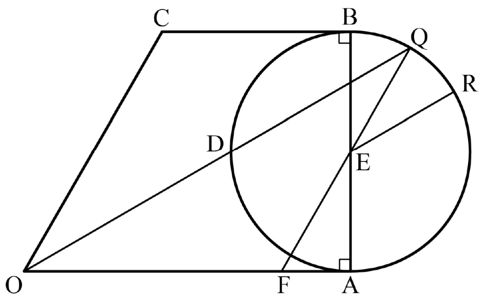
$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EP}}$의 값이 최대일 때

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EP}}$의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EP}}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EP}}$의 방향이 같을 때의 점 P가 Q이다.



선분 QE가 선분 OA와 만나는 점을 F라 하자.

$\angle\mathrm{EFA}=\frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{AE}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{FE}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\overline{\mathrm{FA}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{FA}}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{FE}}+\overline{\mathrm{EQ}}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{FQ}}$이므로 $\angle\mathrm{OQF}=\frac{\pi}{6}$

그러므로 $\overline{\mathrm{DQ}}=2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{ER}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ER}}\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=2\sqrt{3}\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ER}}$의 방향이 같을 때, $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ER}}$의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ER}}\le2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$

㉠에 의하여

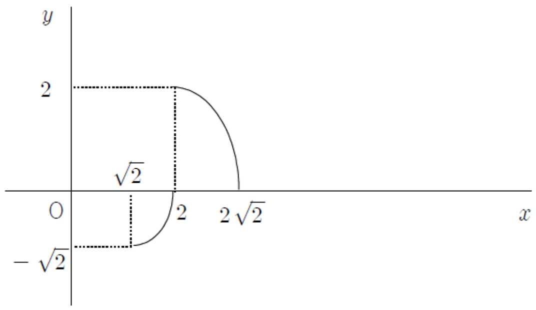
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ER}}\\&\le2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 $M=6\sqrt{3}$이므로 $M^2=108$

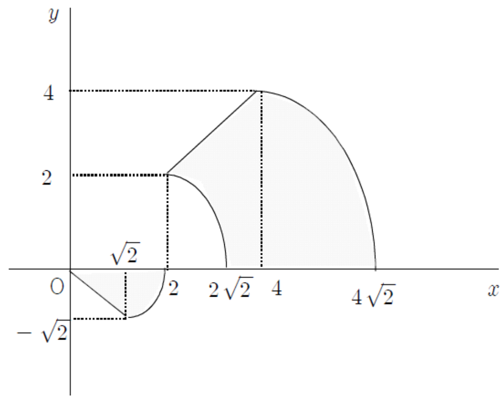
007

[정답] 24

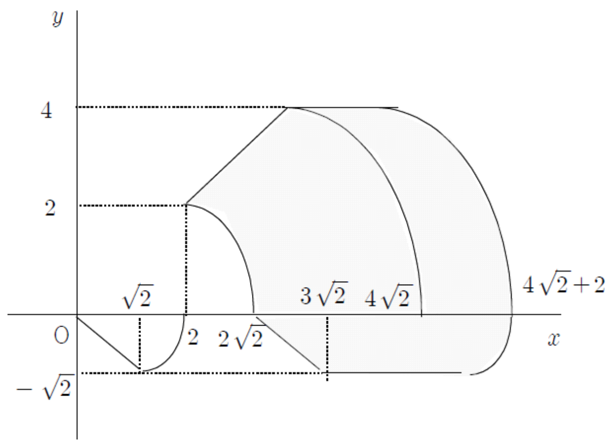
좌표평면에서 곡선 C와 점 Q가 나타내는 곡선은 그림과 같다.



이때, $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}$라 하면 점 A와 $\overrightarrow{OY}$가 나타내는 점 Y는 그림의 색칠된 부분에 존재한다.



따라서 $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OY}$를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역 D의 그림의 색칠된 부분이다.



따라서 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점 R$(2,\ 2)$이므로 $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OZ}$의 최솟값 m은 점 Z가 두 점 $(2\sqrt{2},\ 0)$, $(3\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$을 잇는 선분 위의 점일 때이므로

$m=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OZ}$의 최댓값 M은 점 Z$(6,\ 4)$일 때이므로

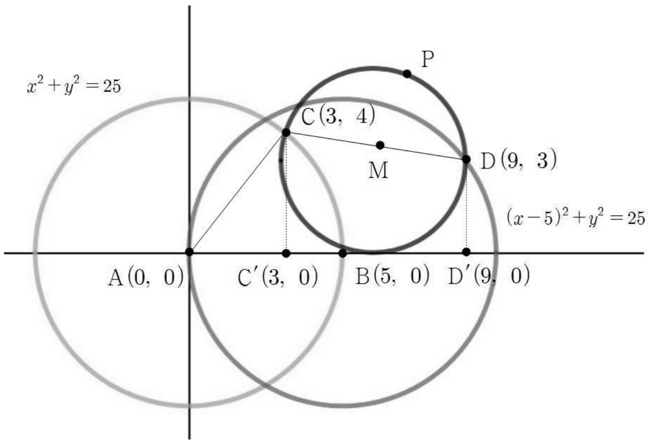
$M=2\times6+2\times4=20$

따라서 $\mathrm{M}+m=20+4\sqrt{2}$이므로 $a=20,\ b=4$

즉, $a+b+24$

008

[정답] 31



그림과 같이 점 A를 원점으로 하는 좌표평면을 생각하자.

조건 (가)에 의해 점 C의 좌표는 C(3, 4)가 된다.

두 점 C, D에서 x에 내린 수선을 발을 각각 C′, D′이라 하면

조건 (나)에 의해 선분 C′D′의 길이는 6이 된다.

또한, $\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|<9$이므로 점 D의 y좌표는 양수가 되어야 하므로 점 D의 좌표는 D(9, 3)이 된다.

선분 CD의 중점을 M이라 하면 점 P는 점 $\mathrm{M}\left(6,\ \frac{7}{2}\right)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{37}}{2}$인 원 위의 점이므로

점 P좌표는 $\mathrm{P}\left(6+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$와 같이 잡을 수 있다.

A(0, 0), B(5, 0)이므로

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\
&=\left(6+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)\\
&=\left(6+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta\right)\left(1+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta\right)+\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)^2\\
&=\frac{55}{2}+\frac{7\sqrt{37}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)\\
&=\frac{55}{2}+\frac{7\sqrt{74}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\\
&\quad\leq\frac{55}{2}+\frac{7\sqrt{74}}{2}
\end{aligned}$$

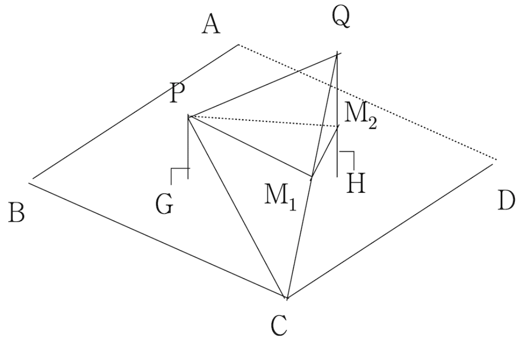
따라서 $a=\frac{55}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이고 구하는 값은 $a+b=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}=31$이다.

009

[정답] 40

$\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이므로 점 P를 지나고 평면 ABCD와 평행한 평면이 두 선분 QC, QH와 만나는 점을 각각 M_1, M_2라 하면 두 점은 중점이다.

이때, 구하는 평면이 이루는 각은 두 평면 PM_1M_2, PM_1Q가 이루는 각이다.



한편 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P′, 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 O_1이라 하면

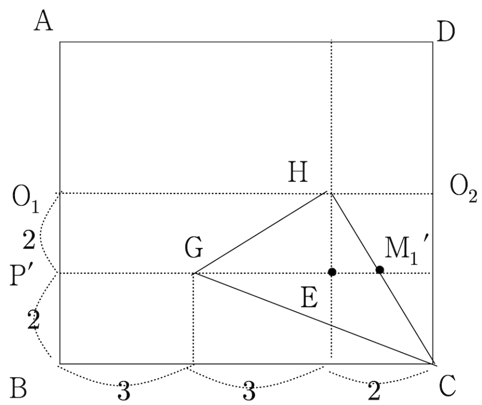
$\overline{O_1P'}=4\cos60^\circ=2$

$\overline{P'G}=\sqrt{\overline{PP'}^2-\overline{PG}^2}=\sqrt{(4\sin60^\circ)^2-(\sqrt{3})^2}=3$

또, 점 Q에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 Q′, 선분 CD를 지름으로 하는 원의 중심을 O_2라 하면

$\overline{HO_2}=\sqrt{\overline{QO_2}^2-\overline{QH}^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

이때, 점 M_1의 평면 ABCD 위로 정사영 시킨 점을 M_1'이라 하면, M_1'은 선분 CH의 중점이므로 그림과 같다.



이때,

$\overline{GH}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\overline{HM_1'}=\frac{1}{2}\overline{HC}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5}$

또, 선분 GM_1'과 점 H를 지나고 선분 BC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하면

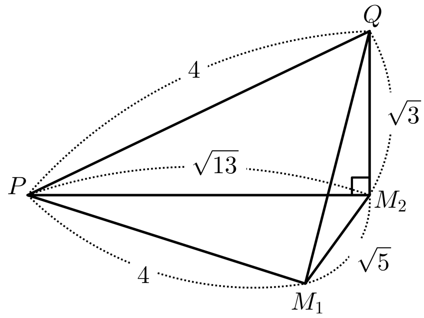
$\overline{GM_1'}=\overline{GE}+\overline{EM_1'}=3+1=4$, $\overline{PM_2}=\overline{GH}=\sqrt{13}$

$\overline{M_1M_2}=\overline{HM_1'}=\sqrt{5}$, $\overline{PM_1}=\overline{GM_1'}=4$

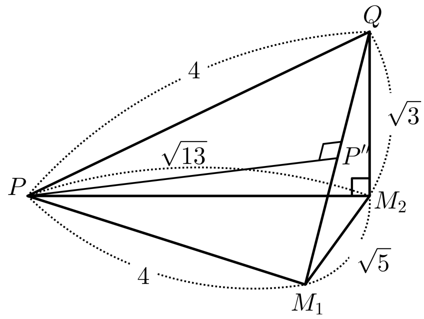
이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\sqrt{13})^2+(\sqrt{3})^2}=4$, $\overline{\mathrm{QM_1}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{2}$

이므로 다음 그림과 같다.



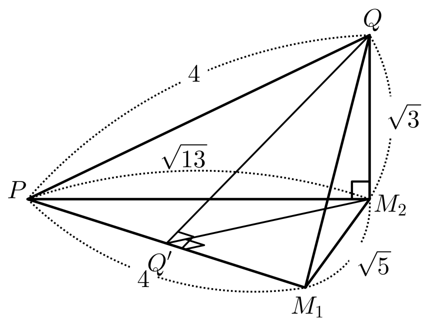
점 P에서 선분 $\mathrm{QM_1}$에 내린 수선의 발을 P″이라 하자.



이때, $\angle \mathrm{PM_1Q}=\alpha$라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\overline{\mathrm{M_1P''}}}{\overline{\mathrm{PM_1}}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{M_1Q}}}{\overline{\mathrm{PM_1}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

또, 점 Q에서 선분 $\mathrm{PM_1}$에 내린 수선의 발을 Q′이라 하면 $\overline{\mathrm{QQ'}}\perp\overline{\mathrm{PM_1}}$이고 $\overline{\mathrm{QM_2}}\perp$(평면 $\mathrm{PM_1M_2}$)이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{M_2Q'}}\perp\overline{\mathrm{PM_1}}$



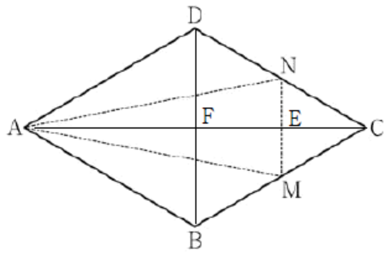
이때, $\overline{\mathrm{M_1Q'}}=\overline{\mathrm{QM_1}}\cos\alpha=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=1$이므로

$\overline{\mathrm{QQ'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{QM_1}}^2-\overline{\mathrm{Q'M_1}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$, $\overline{\mathrm{M_2Q'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{M_2M_1}}^2-\overline{\mathrm{Q'M_1}}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{Q'M_2}}}{\overline{\mathrm{QQ'}}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$이므로 $70\times\cos^2\theta=70\times\frac{4}{7}=40$

010

[정답] 8



$\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times 4=2$

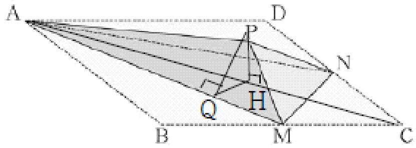
선분 MN의 중점을 E, 선분 AC의 중점을 F라 하면

$\overline{\mathrm{AE}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{AF}}=\frac{3}{2}\times 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

이때 삼각형 AMN의 넓이는

$\triangle\mathrm{AMN}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MN}}\times\overline{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\times 2\times 3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

점 P에서 평면 AMN에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 Q라 하자.



삼각형 AME에서 $\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{ME}}$이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{ME}}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{7}$

삼각형 PAM의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{MP}}\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{PQ}}$ 이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{PQ}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

한편, $\overline{\mathrm{HE}}=k$ (k는 양수)라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{PE}}^2-\overline{\mathrm{HE}}^2$ 이므로

$4^2-(3\sqrt{3}-k)^2=(\sqrt{3})^2-k^2$, 곧, $k=\frac{7\sqrt{3}}{9}$

삼각형 PHE에서 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PE}}^2-\overline{\mathrm{HE}}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{7\sqrt{3}}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{6}}{9}$

삼각형 PHQ에서 $\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2-\left(\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)^2}=\frac{10\sqrt{21}}{63}$

$\overline{\mathrm{PH}}\perp$(평면 AMN), $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{HQ}}\perp\overline{\mathrm{AM}}$

평면 AMN과 평면 PAM의 이면각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\frac{\frac{10\sqrt{21}}{63}}{\frac{2\sqrt{21}}{7}}=\frac{5}{9}$$

삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $3\sqrt{3}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{3}\sqrt{3}$

따라서 $p=3$, $q=5$이므로 $p+q=3+5=8$