「수학Ⅱ」 Ⅱ.미분법

연구01 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때 평균변화율을 구하시오.

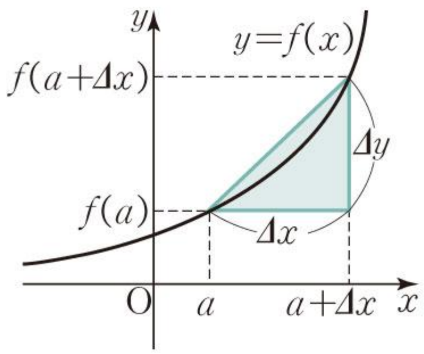
미리 알아야 할 단원
수학2 - 1.함수의 극한

1 평균변화율

연구 01 함수 $y=f(x)$ 에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비율
$(\Delta x = b-a,\ \Delta y = f(b)-f(a))$

평균변화율



연구02 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의
①미분계수 ②좌미분계수 ③우미분계수
를 쓰시오.

2 미분계수

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의

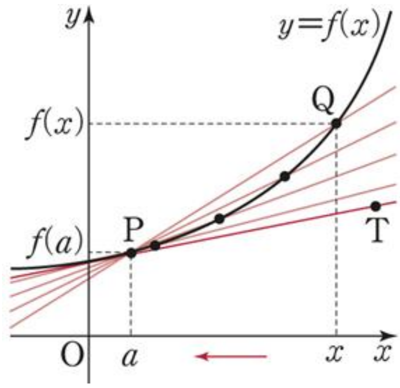
연구 02 ①미분계수 (순간변화율)

②좌미분계수:

③우미분계수:

기하학적인 의미:

미분계수



함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌미분계수

함수 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 $x=a$에서의 좌극한

연구03 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분가능하다는 것의
①정의를 쓰고
②조건을 쓰고
③조건을 유도하시오.

연구04 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서
①미분가능하면 연속인가?
아니라면 예를 드시오.
②연속이면 미분가능한가?
아니라면 예를 드시오.

3 미분 가능성

연구 03
①정의:
②조건:

함수 $f(x)$가 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 말한다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

연구 04
$y=f(x)$가 $x=a$에서
미분가능 $\rightleftarrows$ 연속

미분 가능성

③조건 유도하기

연구05 미분가능한 함수 $g(x)$와 $h(x)$에 대하여, 함수

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \le a) \\ h(x) & (x > a) \end{cases}$$

가 실수 전체에서 미분가능할 조건을 쓰고 이를 유도하시오.

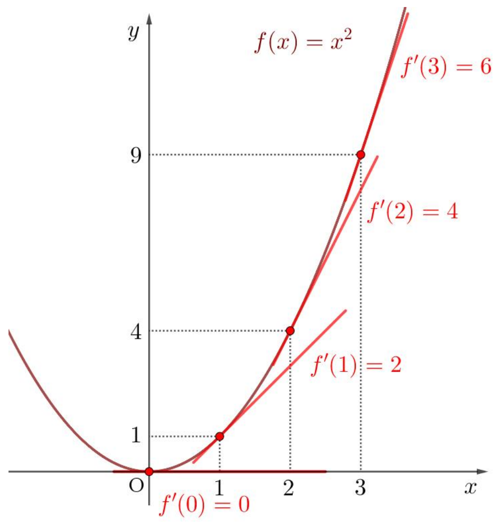
연구06 함수 $y=f(x)$의 도함수의 기호와 정의를 쓰시오.

연구 05

4 도함수

함수 $f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 $f(x)$를 x에 대하여 '미분한다'고 하고, 그 계산법을 '미분법'이라 한다.

연구 06 $y=f(x)$가 미분가능한 함수일 때



수 II

연구07 **미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 아래 식이 성립함을 유도하시오.**

① $\{c\}'=0$

② $\{x^n\}'=nx^{n-1}$

③ $\{cf(x)\}'=cf'(x)$

5 미분법의 공식

연구 07 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\{c\}'=0$

② $\{x^n\}'=nx^{n-1}$

③ $\{cf(x)\}'=cf'(x)$

④ $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

⑤ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

⑥ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

⑦ $\{f(x)g(x)h(x)\}'=f'(x)g(x)h(x)$
$+f(x)g'(x)h(x)$
$+f(x)g(x)h'(x)$

⑧ $(\{f(x)\}^n)'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

미분법의 공식

④$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

⑤$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

⑥$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

[연구08] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 쓰시오.

[연구09] 최대·최소의 정리를 쓰시오.

[연구10] 사이값 정리를 쓰시오.

6 접선의 방정식

연구 08 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

'사잇값의 정리'가
'롤의 정리'와 '평균값의 정리'와는 관계가 없지만,
'c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다'는
결론이 비슷하니 잘 비교해서 보자.
그래야 실전에서 잘 쓸 수 있다!

연구 09 최대·최소의 정리

연구 10 사이값 정리

연구11 롤의 정리를 쓰시오

연구12 롤의 정리를 유도하시오.

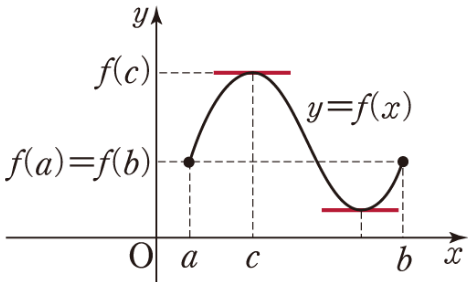
7 롤의 정리

연구 11

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,

$f(a)=f(b)$이면

$f'(c)=0\ (a<c<b)$인 c가 개구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.



롤의 정리

연구 12

연구13 평균값의 정리를 쓰시오.

연구14 평균값의 정리를 유도하시오.

연구15 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서
①증가한다는 것의 정의를 쓰시오.
②감소한다는 것의 정의를 쓰시오.

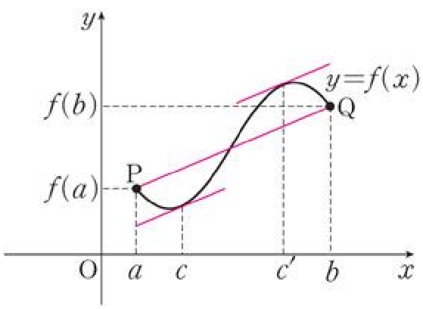
8 평균값의 정리

연구 13

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ (\text{단, } a<c<b)$$

인 c가 개구간 $(a,\ b)$ 안에 적어도 하나 존재한다.



평균값의 정리

연구 14

연구16 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가함을 유도하시오.

연구17 다음 명제의 참 거짓을 판별하시오.

①$y = f(x)$가 증가함수이면 $f'(x) > 0$이다.

②$f'(x) > 0$이면 $y = f(x)$가 증가함수이다.

③$y = f(x)$가 증가함수이면 $f'(x) \geq 0$이다.

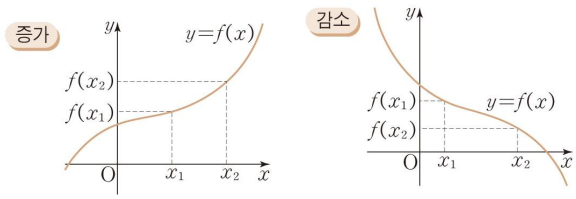
④$f'(x) \geq 0$이면 $y = f(x)$가 증가함수이다.

9 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

연구 15 **함수의 증가:**

함수의 감소:



함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간에서

연구 16 ①$f'(x) > 0$이면

②$f'(x) < 0$이면

연구 17 $f(x)$ 증가 $\rightleftarrows$ $f'(x) > 0$

$f(x)$ 증가 $\rightleftarrows$ $f'(x) \geq 0$

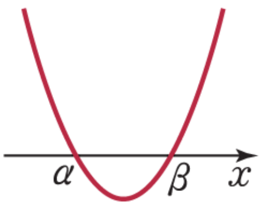
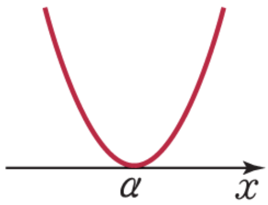
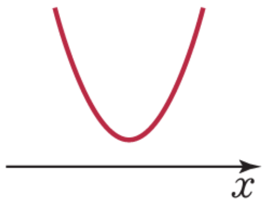
함수의 증가와 감소

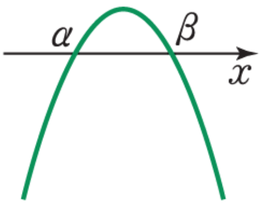
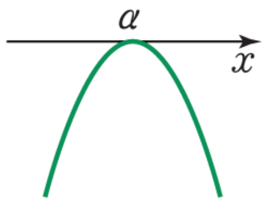
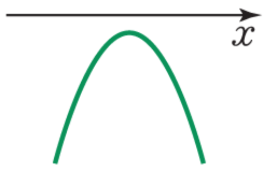
수 II

연구18 삼차함수 $y=f(x)$에 대하여 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음과 같을 때 알맞은 그래프 개형을 그리시오.

연구 18 3차함수의 그래프 개형

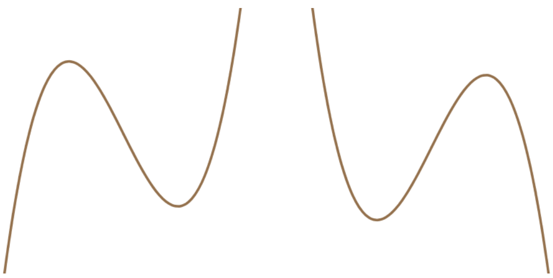
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 일 때, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이므로

$(a>0)$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=f'(x)$ 그래프			
$y=f(x)$ 그래프			

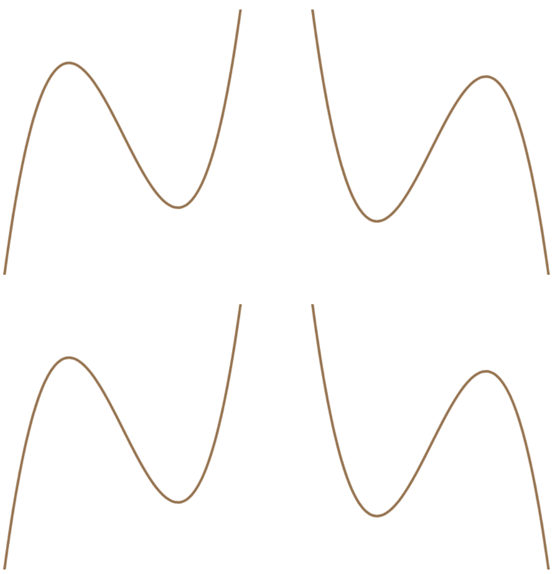
$(a<0)$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=f'(x)$ 그래프			
$y=f(x)$ 그래프			

① 대칭성

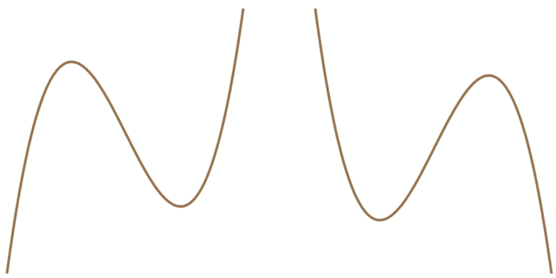
② $\sqrt{3}:1$



③ $2:1$

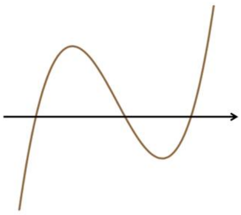
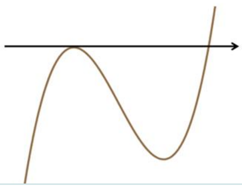
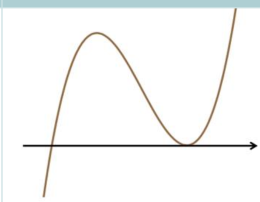
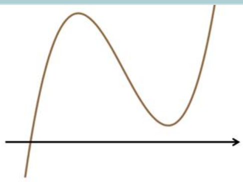


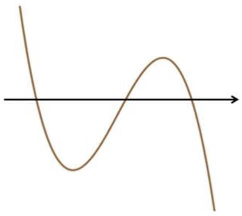
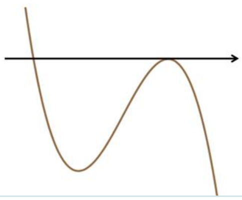
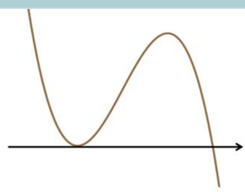
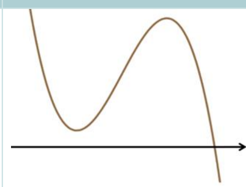
④ 확장



4차함수의 그래프 개형

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 일 때, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ 이므로

$(a > 0)$				
$y = f'(x)$ 그래프				
$y = f(x)$ 그래프				

$(a < 0)$				
$y = f'(x)$ 그래프				
$y = f(x)$ 그래프				

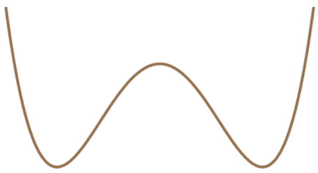
연구19 다항함수 $f(x)$가 아래와 같이 표현될 때, $x=\alpha$ 좌우에서 $f(x)$ 그래프의 부호변화 여부를 쓰시오. (단, $g(\alpha)\neq 0$)

①$f(x)=(x-\alpha)^{\text{짝}}g(x)$

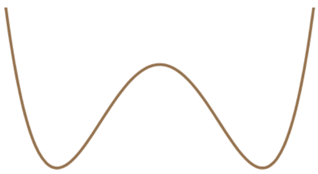
②$f(x)=(x-\alpha)^{\text{홀}}g(x)$

연구20 다항함수 $f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 x축에 접할 때, $f(x)=(x-a)^2g(x)$이 성립함을 유도하시오.

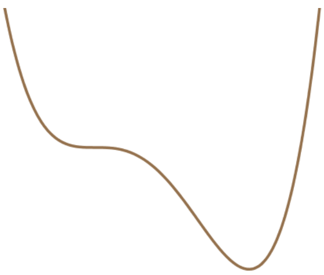
① 대칭성

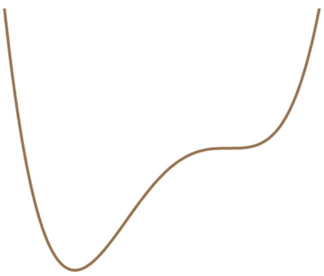


② $\sqrt{2}:1$



③ $3:1$





연구 19

인수의 차수와 그래프 부호 변화

$f(x)=(x-\alpha)^{\text{짝}}g(x)$ vs $f(x)=(x-\alpha)^{\text{홀}}g(x)$

연구 20

$f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 x축에 접한다.

$\Leftrightarrow$ $f(a)=0$, $f'(a)=0$

$\Leftrightarrow$ $f(x)=(x-a)^2g(x)$ (단, $f(x)$는 다항함수)

수Ⅱ

부호를 활용한 그래프 개형

(1) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

(2) $y=a(x-\alpha)^2$

(3) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

(4) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)^2$

(5) $y=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$

(6) $y=a(x-\alpha)^3$

(7) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

(8) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)^2$

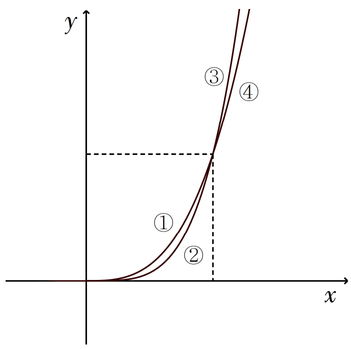
(9) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)$

(10) $y=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

(11) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)^3$

(12) $y=a(x-\alpha)^3(x-\beta)$

(13) 다음은 $y=x^3$과 $y=x^4$의 그래프의 일부이다. $y=x^3$에 해당되는 부분과 $y=x^4$에 해당되는 부분으로 알맞은 것을 짝지으시오.



연구21 함수의 극대와 극소의 정의를 쓰시오.

연구22 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고, $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$임을 유도하시오.

10 함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

연구 21

: $f(a) \geq f(x)$일 때,

$f(x)$는 $x=a$에서 극대라고 한다.

: 극대일 때의 함수값. $f(a)$

: $f(a) \leq f(x)$일 때,

$f(x)$는 $x=a$에서 극소라고 한다.

: 극소일 때의 함수값. $f(a)$

: 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라 한다.

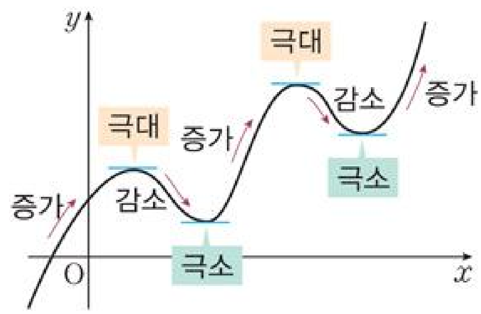
(함수의 증감이 바뀌는 점에서의 값)

연구 22

①함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고, $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$

②$f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

함수의 극대와 극소



연구23 **다음 명제의 참 거짓을 판별하시오.**

① $x=a$에서 $f(x)$가 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

② $f'(a)=0$이면 $x=a$에서 $f(x)$가 극값을 가진다.

연구 20

$x=a$에서 $f(x)$가 극값 $\rightarrow$ $f'(a)=0$

$x=a$에서 $f(x)$가 극값 $\leftarrow$ $f'(a)=0$

$x=a$에서 $f(x)$가 극값 $\rightleftarrows$ $f'(x)$ 부호변화

연구24 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때,
아래 경우마다 $f(x)=0$의 근의 종류를 쓰시오.

① (극댓값)×(극솟값) < 0

② (극댓값)×(극솟값)=0

③ (극댓값)×(극솟값) > 0

11 방정식에의 활용

방정식 $f(x)=0$의 실근은
함수 $y=f(x)$의 그래프와
x축$(y=0)$과의 교점의 x좌표이다.
방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수
$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의
x좌표이다.

연구 21 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때,

① (극댓값)×(극솟값)<0 →

② (극댓값)×(극솟값)=0 →

③ (극댓값)×(극솟값)>0 →

12 부등식에의 활용

①어떤 구간에서 부등식 $f(x)>0$이
성립함을 보이려면
주어진 구간에서 $y=f(x)$의
최솟값>0임을 보이면 된다.

②어떤 구간에서 부등식 $f(x)>g(x)$이
성립함을 보이려면
$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고,
주어진 구간에서 $y=h(x)$의
최솟값>0임을 보이면 된다.

방정식에의 활용

교과서 미분 단원 후반부에 있는 <속도와 가속도> 내용은 학습의 효율성을 위해 적분 단원의 <속도와 거리>내용과 통합하여 적분단원 마지막에 배치하였다.