교재 활용법

문항 배열 : 단원별 난이도순

단원별로 구별되어 있고, 한 단원 내에서 번호가 올라갈수록 난이도가 높아지도록 구성되어 있습니다. 너무 어렵다면 다른 단원을 풀고 다시 돌아와서 도전해보시기 바랍니다.

해설 : 교과서와 맑은개념을 기반으로 서술

이 책의 해설지는 교과서와 맑은개념을 기반으로 서술되어 있습니다. 맑은개념을 읽지 않았더라도 이 책의 대부분의 해설을 이해할 수 있습니다. 하지만 세세한 발상들은 맑은개념이나 맑은기출에서 다루었던 내용에서 근거했을 수 있습니다. 킬러편을 공부하는 학생이라면 맑은개념과 기출을 비교적 단시간 내에 빠르게 학습할 수 있으므로, 교과서와 기출에 근거하여 발상을 재정립해보고 싶다면 맑은개념-맑은기출 시리즈 학습을 권장합니다.

해설을 대하는 자세와 피드백 방법

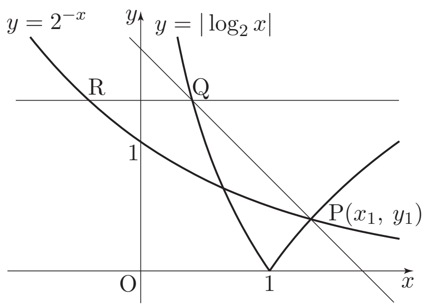
문제를 맞고 틀림에 관계없이 해설지와 비교하며 시야를 넓힐 수 있습니다. 맞았더라도 자신의 풀이에 보완해야 할 점이 있을 수도 있고, 자신과 다른 풀이를 배울 수도 있습니다. 틀렸다면 막힌 부분을 어떻게 해결하는지 배울 수 있습니다.
한편 해설지에 여러 풀이가 제공되어 있을 경우, 뒤에 나오는 풀이의 발상 난이도가 더 높습니다. 앞에 나오는 풀이로 풀었다면 뒤에 나오는 풀이를 통해 다양한 발상을 익히고, 뒤에 나오는 풀이로 풀었다면 앞에 나오는 풀이를 자신이 구사할 수 있는지 확인해보며 역량을 골고루 높일 수 있습니다.

교재 후기 : 전태원(미적분 백분위 100)

저는 일격필살 팀의 인투더 중학도형/ 인투더 수학1&2/ 인투더 미적분/ 트윈기출(2022수능대비) 수1, 수2, 미적분/ 일격필살 N제 시즌1 수1&수2, 미적/ 일격필살 N제 시즌2 수1&수2&미적/ 일격필살 파이널 모의고사를 풀었습니다. 통합 이후 존재한 일격필살 팀의 모든 컨텐츠를 풀었다고 할 수 있겠네요. 그 결과 2023 대학 수학 능력 평가에서 미적분 백분위 100을 받을 수 있었습니다. 지금부터 제가 도움 받은 부분과 일격필살 팀의 컨텐츠가 좋았던 점들을 짚어보려고 합니다.
수학 실력을 키우기 위해서 소위 양치기라고 불리는 문제 푸는 양을 늘리는 것이 중요하다고 생각합니다. 하지만 어떤 문제든 마구잡이로 푸는 것이 아니라 좋은 문제들을 많이 풀어야 합니다. 일격 필살 팀의 문제들을 한 단어로 표현하면 '새롭다' 였던 것 같습니다. 다른 콘텐츠를 풀다 보면 기출에서 본 듯한, 기출과 유사한, 그런 문항들이 많았습니다. 또한 무리한 사고 과정을 요구하거나 고등 교육 과정을 벗어난 그런 문제들도 가끔씩 있었습니다. 일격 필살 팀의 문제들은 낯설었습니다. 생소했고 드물었습니다. 수능에는 한 번 나온 문제는 두 번 다시는 나오지 않는다는 것은 모두가 아는 상식입니다. 그런 상식에 걸맞은 참신한 문제들을 풀면서 앞으로의 수능에 나올 새로운 문제들을 예상하고 대비할 수 있었습니다.

01

좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$, $y=2^{-x}$의 교점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ $(x_1>1)$에 대하여 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=|\log_2 x|$와 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{-x}$와 만나는 점을 R라 할 때, 다음 설명 중 옳은 것만을 ⟨보기⟩에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.) [4점]



보기

ㄱ. 점 Q는 곡선 $y=2^x$ 위에 있다.

ㄴ. $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}$

ㄷ. $\tan(\angle \mathrm{QPR})>\dfrac{1}{2x_1}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 해설 2쪽

25

상수 a에 대하여 함수 $f(x)=|x-a|-3$이 있다. 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $|g(x)|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 k의 개수는 3이고, 모든 k의 값의 합은 6이다.

(나) 함수 $(|f(x)|+n)\times(|g(x)|+n)$이 $x=k$에서 미분가능하지 않은 k의 개수는 $n+1$이다. $(n=0,\ 1)$

$g(3a)=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

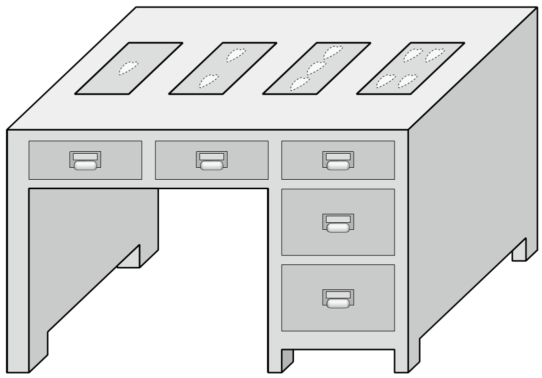
정답과 해설 72쪽

03

그림과 같이 책상에 일렬로 놓여 있는 동일한 네 장의 카드에 대하여 왼쪽에서 n번째 카드의 앞면에 n개의 스티커를 붙인 후에, 네 장의 카드 모두 뒷면만 보이도록 놓았다. (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$) 네 장의 카드 중에서 임의로 카드를 한 장 선택한 후 다음의 규칙에 따라 카드를 뒤집는 시행을 한다.

선택한 카드가 책상 위에서 뒷면만 보이도록 놓여 있으면 앞면만 보이도록 뒤집고, 앞면만 보이도록 놓여 있으면 뒷면만 보이도록 뒤집는다.

시행을 네 번 마쳤을 때, 책상 위에 드러난 스티커의 개수가 4 이상이 될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오 (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

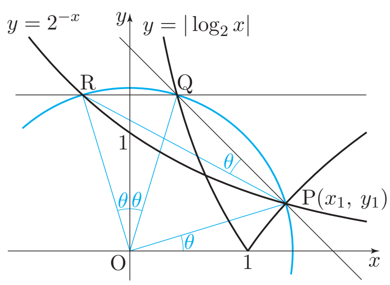


01

ㄱ. 두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=\log_2 x$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 각 곡선의 식은 각각 $y=-\log_2 x$와 $y=2^x$가 됩니다. 각 곡선의 교점도 서로 $y=x$에 대하여 대칭이므로 각 곡선의 교점을 이은 직선의 기울기는 -1입니다. 따라서 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=-\log_2 x$와 만나는 점 Q는 두 곡선 $y=-\log_2 x$, $y=2^x$의 교점과 일치합니다. 즉 점 Q는 곡선 $y=2^x$ 위에 있습니다. (참)

ㄴ. 두 곡선 $y=2^x$와 $y=2^{-x}$는 서로 y축에 대하여 대칭입니다. 따라서 x축에 평행한 직선이 두 곡선과 만나는 점들도 서로 y축에 대하여 대칭입니다. 즉 두 점 R, Q는 서로 y축에 대하여 대칭입니다. 여기서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}$을 얻고, 두 점 P, Q는 서로 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$입니다. 따라서 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}$입니다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}$임을 알았으므로 세 점 P, Q, R는 원점 O를 중심으로 하는 원 위의 점입니다.



$\angle\mathrm{QPR}=\theta$라 하면 원주각과 중심각의 관계에 의해 $\angle\mathrm{QOR}=2\theta$입니다. 대칭 관계에 의해 직선 OQ와 y축이 이루는 예각은 θ이고, 두 점 P, Q는 서로 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 OP와 x축이 이루는 각의 크기도 θ입니다. 즉 직선 OP와 x축이 이루는 예각의 크기는 $\angle\mathrm{QPR}=\theta$인데, $\tan\theta=\dfrac{y_1}{x_1}$이므로 ㄷ보기가 맞다면 $\dfrac{y_1}{x_1}>\dfrac{1}{2x_1}$이 성립하는 것이 됩니다. 그런데 $y=2^{-x}$가 감소함수이고 $x=1$에서의 함숫값이 $\dfrac{1}{2}$인데 $x_1>1$이므로 $y_1<\dfrac{1}{2}$입니다. 따라서 위 부등식은 성립하지 않습니다. (거짓)

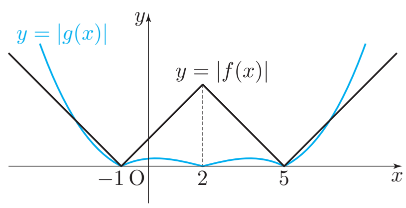
정답 : ②

25

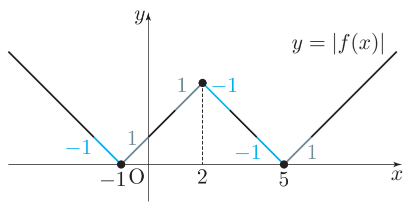
(가) 조건에서 $g(x)$가 삼차함수이므로, $|g(x)|$가 미분가능하지 않은 모든 x에서 $g(x)=0$입니다. 즉 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖고, 모든 실근의 합은 6입니다.

(나)에서 $h_n(x)=(|f(x)|+n)\times(|g(x)|+n)$이라 하고, n의 값에 따라 해석해 보겠습니다.

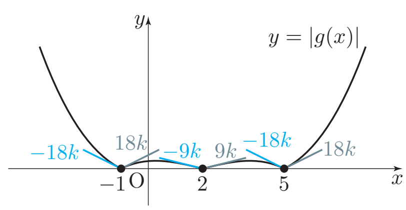
① $n=0$인 경우, 함수 $h_0(x)=|f(x)|\times|g(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 1입니다. 그런데 (가)에 의해 $|g(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 3이고, $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수도 3이므로, 방정식 $g(x)=0$의 모든 실근은 $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 x와 같습니다.[7]



$f(x)=0$인 x는 $x=a-3$, $x=a+3$이고 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않으므로, $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 모든 x는 $a-3$, a, $a+3$입니다. 즉 방정식 $g(x)=0$의 세 실근도 각각 $a-3$, a, $a+3$입니다. 그런데 모든 실근의 합이 6이므로 $a=2$입니다. 따라서 $g(x)=k(x+1)(x-2)(x-5)$라 할 수 있습니다.



이 경우 함수 $h_0(x)=|f(x)|\times|g(x)|$의 미분가능성을 따져 보겠습니다. $(|f|)'(-1)$의 좌극한은 -1, 우극한은 1이고, $(|f|)'(2)$의 좌극한은 1, 우극한은 -1이며, $(|f|)'(5)$의 좌극한은 -1, 우극한은 1입니다.[8]



한편 $g'(x)=k(3x^2-12x+3)$이므로 $g'(1)=18k$, $g'(2)=-9k$, $g'(5)=18k$입니다. 즉 $(|g|)'(-1)$의 좌극한은 $-18k$, 우극한은 $18k$이고, $(|g|)'(2)$의 좌극한은 $-9k$, 우극한은 $9k$이며, $(|g|)'(5)$의 좌극한은 $-18k$, 우극한은 $18k$입니다.

---

[7] $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 x와 $|g(x)|$가 미분가능하지 않은 x가 일치하지 않는다고 가정하면, $h_0(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 최소 2개이므로 (나) 조건을 만족시키지 않습니다. 이는 $g(x)$가 함숫값이 0이면서 미분계수도 0인 점이 없기 때문에 성립하는 것입니다.

[8] 여기에서 $(|f|)'(a)$의 좌극한은 $\lim_{h\to 0-}\dfrac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}$, $(|f|)'(a)$의 우극한은 $\lim_{h\to 0+}\dfrac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}$를 의미합니다. 일명 좌미분계수, 우미분계수라 불리는 것들입니다.

$h_0'(x) = |f(x)|' \times |g(x)| + |f(x)| \times |g(x)|'$ 입니다. 따라서 $h_0'(-1)$, $h_0'(2)$, $h_0'(5)$ 의 좌극한과 우극한을 구하면 다음과 같습니다.

$$(h_0'(-1)\text{의 좌극한}) = (-1) \times 0 + 0 \times (-18k) = 0$$

$$(h_0'(-1)\text{의 우극한}) = (1) \times 0 + 0 \times (18k) = 0$$

$$(h_0'(2)\text{의 좌극한}) = (1) \times 0 + 3 \times (-9k) = -27k$$

$$(h_0'(2)\text{의 우극한}) = (-1) \times 0 + 3 \times (9k) = 27k$$

$$(h_0'(5)\text{의 좌극한}) = (-1) \times 0 + 0 \times (-18k) = 0$$

$$(h_0'(5)\text{의 우극한}) = (1) \times 0 + 0 \times (18k) = 0$$

따라서 $h_0(x)$는 $x = 2$에서만 미분가능하지 않습니다. 즉 (나)에서 $n = 0$일 때 조건이 성립합니다.

② $n = 1$일 때 함수 $h_1(x) = (|f(x)| + 1) \times (|g(x)| + 1)$이 미분가능하지 않은 점의 개수는 2입니다.
$h_1'(x) = |f(x)|' \times (|g(x)| + 1) + (|f(x)| + 1) \times |g(x)|'$ 이므로 $h_1'(-1)$, $h_1'(2)$, $h_1'(5)$ 의 좌극한과 우극한을 구하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
(h_1'(-1)\text{의 좌극한}) &= (-1) \times 1 + 1 \times (-18k) \\
&= -1 - 18k \\
(h_1'(-1)\text{의 우극한}) &= (1) \times 0 + 1 \times (18k) \\
&= 1 + 18k \\
(h_1'(2)\text{의 좌극한}) &= (1) \times 1 + 4 \times (-9k) \\
&= 1 - 36k \\
(h_1'(2)\text{의 우극한}) &= (-1) \times 1 + 4 \times (9k) \\
&= -1 + 36k \\
(h_1'(5)\text{의 좌극한}) &= (-1) \times 1 + 1 \times (-18k) \\
&= -1 - 18k \\
(h_1'(5)\text{의 우극한}) &= (1) \times 1 + 1 \times (18k) \\
&= 1 + 18k
\end{aligned}$$

k의 값이 양수이므로 $h_1'(-1)$의 좌극한과 우극한, $h_1'(5)$의 좌극한과 우극한이 각각 같아질 수 없습니다. 즉 $h_1(x)$가 두 점에서 미분가능하지 않다는 조건을 만족시키지 않습니다. 한편 $h_1'(2)$의 좌극한과 우극한이 같도록 하는 k는 $k = \dfrac{1}{36}$이 존재합니다. 이때 $h_1(x)$가 $x = 2$에서만 미분가능하고, $x = -1$과 $x = 5$에서는 미분가능하지 않으므로 (나) 조건을 만족시킵니다.

따라서 $g(x) = \dfrac{1}{36}(x+1)(x-2)(x-5)$이고 $g(3a) = g(6) = \dfrac{7}{9}$이므로 $p + q = 16$입니다. 정답 : 16

03

시행을 네 번 마쳤을 때 책상에 보이는 스티커의 개수가 4 이상이 되는 경우의 수는, 전체 경우의 수($=4^4$)에서 스티커의 개수가 4보다 작은 경우의 수를 빼서 구할 수 있습니다. 책상에 보이는 스티커의 개수를 기준으로 분류하겠습니다.

① 보이는 스티커가 0장인 경우

(2, 2, 2, 2)와 같이 네 번 연속 같은 카드를 고르거나, (1, 3, 1, 3)과 같이 두 쌍의 카드를 각각 두 번씩 고른 경우가 있을 수 있습니다. 네 번 연속 같은 카드를 고르는 경우의 수는, 어느 카드를 네 번 고를지 결정하는 경우의 수와 같으므로, ${}_4\mathrm{C}_1=4$입니다. 두 쌍의 카드를 각각 두 번씩 고르는 경우의 수는, 어느 카드를 두 번씩 고를지 결정하는 경우의 수와 고른 카드를 나열하는 경우의 수의 곱과 같으므로, ${}_4\mathrm{C}_2\times\dfrac{4!}{2!2!}=36$입니다.

따라서 보이는 스티커가 0장인 경우의 수는 $4+36=40$입니다.

② 보이는 스티커가 1장인 경우

스티커가 1장 붙여진 카드만 앞면이 보여야 하는데, 짝수 번 카드를 뒤집으므로 한 장의 카드만 뒤집어질 수 없습니다.

③ 보이는 스티커가 2장인 경우

스티커가 2장 붙여진 카드만 앞면이 보여야 하는데, 짝수 번 카드를 뒤집으므로 한 장의 카드만 뒤집어질 수 없습니다.

④ 보이는 스티커가 3장인 경우

스티커가 1장 붙여진 카드의 앞면과 스티커가 2장 붙여진 카드의 앞면이 보여야 하고, 나머지 두 카드는 앞면이 보이면 안 됩니다. 가능한 경우는 (1, 2, 1, 1), (1, 2, 2, 2), (1, 2, 3, 3), (1, 2, 4, 4)의 네 가지 경우가 있습니다. 각각의 경우에서, 숫자를 나열하는 경우의 수를 각각 구해서 모두 더하면 $\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{2!}+\dfrac{4!}{2!}=32$ 입니다.

전체 경우의 수는 4^4이므로 구하는 확률은 $\dfrac{4^4-40-32}{4^4}=\dfrac{23}{32}$입니다. 따라서 $p+q=32+23=55$입니다.

정답 : 55