중적분 3

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

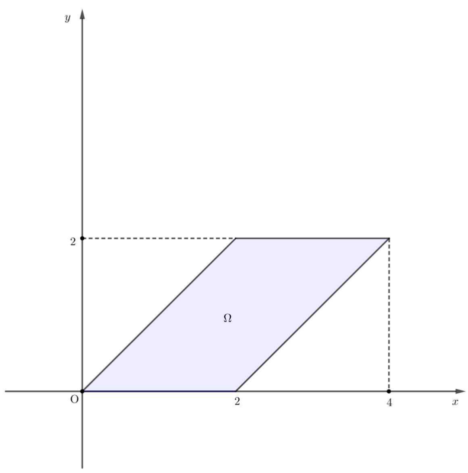
Ⅰ. 중적분의 계산(5)

<중적분 1>과 <중적분 2>에서는 중적분의 값을 구하는 방법 네 가지에 대해 알아보았고, 특히 <중적분 2>에서는 극좌표 변환을 다루어 보았다. 한편 중적분에서도 치환적분의 개념이 있고, 이를 변수 변환이라고 한다. 여기서는 극좌표 변환뿐만 아니라 일반적인 상황에서의 변수 변환에 대해 알아볼 것이다.

가령 아래 **[그림 1]**과 같이 정의된 영역 Ω에 대하여 $\iint_{\Omega}(x-y)^2 dA$ 를 구한다고 해보자. x를 먼저 적분하고 x, y의 범위를 각각 구해보면 $0 \le y \le 2$, $y \le x \le y+2$이므로

$$\iint_{\Omega}(x-y)^2 dA = \int_0^2 \int_y^{y+2}(x-y)^2 dxdy = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}(x-y)^3\right]_y^{y+2} dy = \int_0^2 \frac{8}{3}dy = \frac{16}{3}$$

이다.

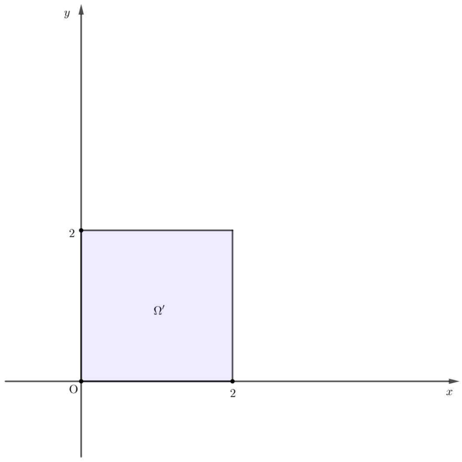


[그림 1] 영역 Ω의 모습

한편 영역 Ω는 기울기가 1인 직선이 x축과 평행한 방향으로 이동할 때 쓸고 지나가는 면적의 형태이므로 $y=x+k$를 이용할 수 있다. $y=x+k$라 하면 $x-y=-k \ge 0$이므로 $x-y=u$, $y=v$와 같이 치환할 수 있고, 중적분에서는 이를 변수 변환이라고 한다. 정적분에서 치환적분을 할 때 바뀌는 것은 적분 구간, 피적분함수, 그리고 적분 변수 dx이므로, 중적분에서도 변수 변환을 통해 이들이 어떻게 바뀌는지 알아야 한다.

먼저 u, v의 범위를 구해보자. 영역 Ω는 네 개의 선분 또는 직선으로 둘러싸여 있으므로, 이 경계선 부분이 어떻게 바뀌는지만 고려해도 충분하다. (닫힌 영역은 변수변환을 거치더라도 반드시 닫힌 영역으로 변환되기 때문에 경계선의 변환만을 이용하여 변환 후의 영역을 알아낼 수 있다.)

$x = u+v,\ y = v$를 네 개의 직선에 각각 대입해보자. 먼저, 직선 $y=0$은 $u=x,\ v=0$으로 바뀌고 이는 직선 $v=0$이다. 직선 $y=x-2$는 $v=x-2,\ u=2$로 바뀌고 이는 직선 $u=2$이다. 직선 $y=x$는 $u=0,\ v=x$로 바뀌고 이는 직선 $u=0$이다. 직선 $y=2$는 $u=x-2,\ v=2$로 바뀌고 이는 직선 $v=2$이다. 따라서 u, v의 영역 Ω'은 아래 [그림 2]와 같이 그려진다.



[그림 2] 영역 Ω'의 모습

피적분함수는 $x=u+v,\ y=v$를 대입하여 쉽게 얻을 수 있으므로, 마지막으로 dA만 바꾸면 된다. 중적분의 치환적분에서 미소넓이 dA를 바꿀 때는 좌표계 변환법의 일종인 야코비안(Jacobian)을 이용해야하고,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

이므로 이 경우의 야코비안은 $J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$이고 $dA = |J|dudv = dudv$이다. (이에 대한 증명 및 응용은 다음 과정에서 다룰 것이다.)

따라서 최종적인 계산은 다음과 같고, 이는 서두에서 치환을 적용하지 않고 구한 값과 일치한다.

$$\iint_{\Omega} (x-y)^2 dA = \iint_{\Omega'} u^2 dudv = \int_0^2 \int_0^2 u^2 dudv = \int_0^2 \frac{8}{3} dv = \frac{16}{3} \blacksquare$$

Ⅱ. 야코비안(Jacobian)

야코비안은 중적분에서 좌표계를 변환하는 방법으로, 변수 x, y가 u, v로 변환될 때 다음이 성립한다.

$$J = \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right|, \quad dA = |J| dudv$$

J의 정의에 있는 절댓값 기호는 행렬식이라는 뜻이며, 행렬을 다루는 것에 익숙하지 않다면 다음과 같이 정의해도 된다. ($dA = |J| dudv$의 $|J|$는 절댓값이고, 이는 u와 v의 순서가 바뀌었을 때 야코비안의 값이 음수가 되므로 중적분의 값이 바뀌는 것을 막기 위해 절댓값을 씌워주는 것이다.)

$$J = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

여기서 $\frac{\partial}{\partial u}$는 편미분 기호이며, 미분 기호의 d 대신 ∂(라운드)를 사용한다. 예를 들어, $x = u^2 + v^3$의 양변을 음함수 미분하면 $dx = 2udu + 3v^2dv$이고 여기서 $2u$가 x를 u로 편미분한 것, $3v^2$이 x를 v로 편미분한 것이다. 즉, 미분하는 변수 외에는 모두 상수로 취급하고 미분을 하는 것이다. 이를 다시 쓰면

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = x_u du + x_v dv \quad \cdots \quad [1]$$

이고, $\frac{\partial x}{\partial u} = x_u$의 간략화된 기호가 사용되었다. 이처럼 편미분 자체는 상수취급의 개념만 인지한다면 일반적인 미분과 거의 비슷하다. 예를 들어, $f(x, y, z) = x + e^{y+z} - \frac{2y - 7z}{\sqrt{3}z}$를 x로 편미분하면 y, z는 모두 상수가 되므로 $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 1$이다.

야코비안의 엄밀한 증명은 대학 미적분학 교재에 자세하게 설명되어 있으며, 야코비안을 엄밀하게 증명하는 것이 목적이 아니므로 이 글에서는 이해를 돕기 위해 조금 다른 방법으로 증명을 서술하도록 하겠다. (결과는 동일하게 나오지만 증명에는 엄밀하지 않은 부분이 있으며, 가장 엄밀한 증명은 미적분학 교재를 참고하길 바란다.)

x, y 좌표계가 치환을 통해 u, v로 바뀐다는 것은 적당한 이변수함수 f, g가 존재하여 $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}$ 인 것이다. 이때 양변을 음함수 미분하면 [1]에서 알아낸 관계에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{cases} dx = f_u du + f_v dv \\ dy = g_u du + g_v dv \end{cases}$$

($f_u = \dfrac{\partial f}{\partial u}$, $f_v = \dfrac{\partial f}{\partial v}$이다.)

이때 x, y 좌표계의 미소넓이 dA는 dx와 dy 벡터의 외적의 절댓값이므로

$$dA = |dx \times dy| = \left|(f_u du + f_v dv) \times (g_u du + g_v dv)\right|$$

이다. 또한 동일한 벡터의 외적은 영벡터이고 $dv \times du = -du \times dv$이므로

$$dA = \left|(f_u du + f_v dv) \times (g_u du + g_v dv)\right| = \left|(f_u g_v - f_v g_u) du \times dv\right|$$

이다. 마지막으로 u, v의 치환을 통해 직사각형 형태의 영역을 얻는다고 사정하면 du와 dv 벡터는 서로 수직이므로

$$dA = \left|(f_u g_v - f_v g_u) du \times dv\right| = \left|f_u g_v - f_v g_u\right| dudv = |J| dudv$$

를 얻는다. ■

(f_u 표기를 이용하면 야코비안을 $J = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = f_u g_v - f_v g_u$와 같이 간단하게 표기할 수 있다.)

Ⅲ. 야코비안을 이용한 극좌표 변환의 증명

이제 야코비안을 이용하여 <중적분 2>에서 다룬 극좌표 변환을 증명할 수 있다. <중적분 2>에서는 미소 넓이의 변환을 이용하여 보였지만, 이는 엄밀하지 않으므로 야코비안을 이용하여 실제로 성립하는지 확인할 필요가 있다.

극좌표 변환은 x, y 좌표를 r, θ로 바꾸는 변환이고, 그 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = f(r, \theta) \\ y = r\sin\theta = g(r, \theta) \end{cases}$$

야코비안을 구해보면

$$J = \begin{vmatrix} f_r & f_\theta \\ g_r & g_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

이고, r은 원점으로부터의 거리를 나타내므로 $r \geq 0$이다. 따라서 $|J| = r$이고

$$dA = rdrd\theta$$

를 얻는다. ■

Ⅳ. 연습문제

1. Ω를 타원 $9x^2 + 4y^2 = 36$에 의해 둘러싸인 영역이라 할 때, $x = 2u$, $y = 3v$의 변수 변환을 이용하여 $\iint_{\Omega} x^2 dA$ 의 값을 구하여라.

2. Ω를 네 점 $(1, 0), (2, 0), (0, 2), (0, 1)$을 꼭짓점으로 하는 사다리꼴 영역이라 할 때, 적당한 변수 변환을 이용하여 $\iint_{\Omega} \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$ 의 값을 구하여라.

3. Ω를 부등식 $|x| + |y| \leq 1$에 의해 주어진 영역이라 할 때, 적당한 변수 변환을 이용하여 $\iint_{\Omega} e^{x+y} dA$ 의 값을 구하여라.

4. 네 직선 $y = 2x+3$, $y = 2x+1$, $y = 5-x$, $y = 2-x$로 둘러싸인 영역을 Ω라 할 때, 적당한 변수 변환을 이용하여 $\iint_{\Omega} \frac{y-2x}{y+x} dxdy$의 값을 구하여라.