Seoul Union of Math education

서울권 수학교육과 연합 동아리
SUM 소모임 해장 고3팀 주관

theme 1. 지수와 로그

1. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

대칭성

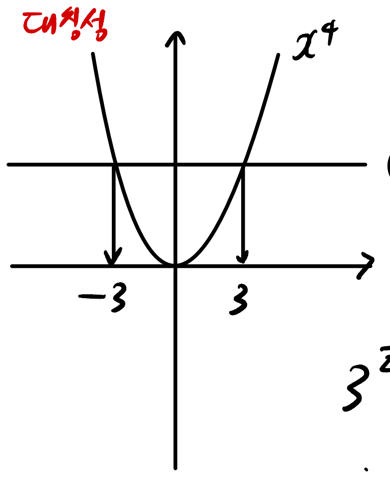
> $\sqrt{3^{f(n)}}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

-3×3

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

2023 9월 11

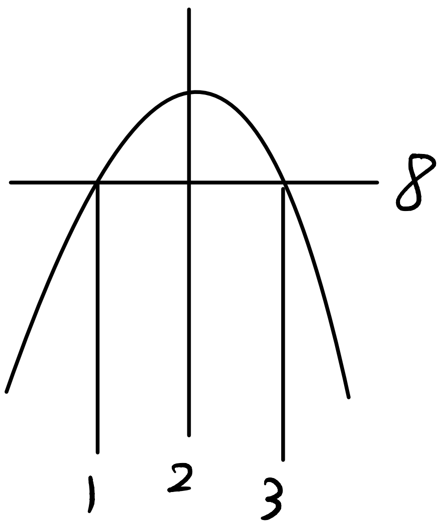
대칭성



$\bigcirc = 81$

$3^{\frac{1}{2}f(n)} = 3^4$

$\therefore f(n) = 8$



$f(1)=f(3)=8$

$8=-1+k$

$\boxed{k=9}$

2. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$2^{2-(x^2-2x)} \le 2^{x^2-2x}+k$$

를 만족시키는 10 이하의 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

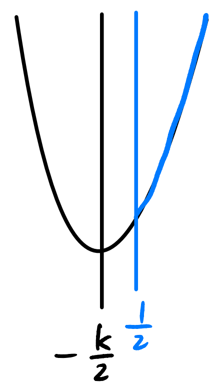
2021 문참시 자작문제

$x^2-2x=(x-1)^2-1 \ge -1$

$2^{x^2-2x} = t \ge \frac{1}{2}$
치환

$4\cdot\frac{1}{t} \le t+k$

$t^2+kt-4 \ge 0$



$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k-4 \ge 0$

$\frac{1}{2}k \ge \frac{15}{4}$

$k \ge \frac{15}{2}$

$k=8, 9, 10$

$\boxed{27}$

3. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

역수

> (가) $3^a = 5^b = k^c$
> (나) $\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$

2020 9월 나28

(나) $\log c = \log \dfrac{2ab}{2a+b}$ $\quad\therefore c = \dfrac{2ab}{2a+b}$ 곱 / 합

역수 $\dfrac{1}{c} = \dfrac{2a+b}{2ab} = \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{b}$

Sol1) 지수풀이

(가) $\sqrt{3}^{\frac{1}{c}} = k^{\frac{1}{2a}}$, $5^{\frac{1}{c}} = k^{\frac{1}{b}}$

$5\sqrt{3}^{\frac{1}{c}} = k^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}}$ $\quad\therefore k = 5\sqrt{3}$ $\quad\boxed{75}$

Sol2) 로그 풀이

(가) $3^a = 5^b = k^c = m$

$a = \log_3 m$, $b = \log_5 m$, $c = \log_k m$

밑통일 $\dfrac{1}{2a} = \log_m \sqrt{3}$, $\dfrac{1}{b} = \log_m 5$, $\dfrac{1}{c} = \log_m k$

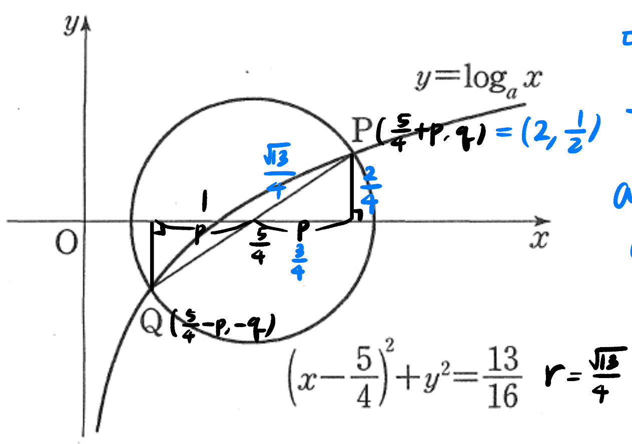
$\log_m k = \log_m \sqrt{3} + \log_m 5 = \log_m 5\sqrt{3}$

$\therefore k = 5\sqrt{3}$ $\quad\boxed{75}$

theme 2. 지수함수와 로그함수

4. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 C: $\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \dfrac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5



대입

$\dfrac{1}{2} = \log_a 2$

$a^{\frac{1}{2}} = 2$

$a = 4$

Sol1)

$\dfrac{5}{4}-p$, 1, $\dfrac{5}{4}+p$ 등비

$1 = \dfrac{25}{16} - p^2$ $\quad p^2 = \dfrac{9}{16}$ $\quad\therefore p = \dfrac{3}{4}$

2018 9월 가16

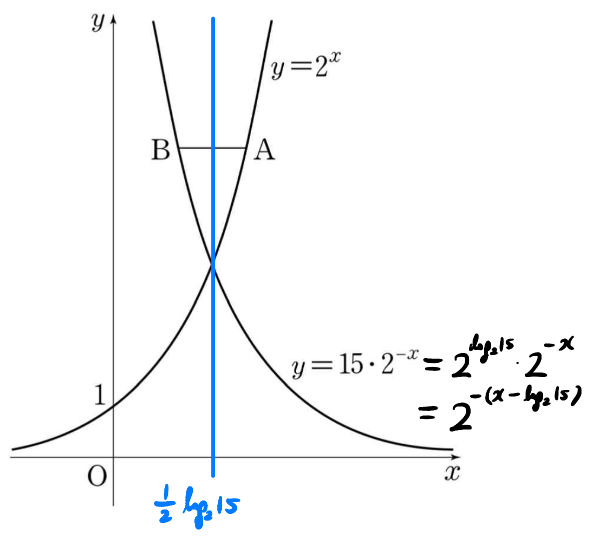
Sol2) $q = \log_a\left(\dfrac{5}{4}+p\right)$

$-q = \log_a\left(\dfrac{5}{4}-p\right)$

$0 = \log_a\left(\dfrac{25}{16}-p^2\right)$

대칭성

5. 그림과 같이 함수 $y=2^x$ 의 그래프 위의 한 점 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y=15\times2^{-x}$ 의 그래프와 만나는 점을 B 라 하자. 점 A 의 x 좌표를 a 라 할 때, $1<\overline{\mathrm{AB}}<100$ 을 만족시키는 2 이상의 자연수 a 의 개수는? [4점]



① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

2014 6월 가17 나20

$\overline{AB}=2\left(a-\frac{1}{2}\log_2 15\right)$

$=2a-\log_2 15$

$1<\quad\quad<100$

$1+\log_2 15<2a<100+\log_2 15$ (3.xx)

$\;\;$ ‖ $\quad\quad\quad$ ‖

4.xx $\quad\quad$ 103.xx

$a=3, ?, \cdots, 51$

6. 두 상수 a, b $(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

$a^b+b^a=40$
$\;20\quad 20$

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

2022 수능 13

Sol1) 계산

$y=\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$

$y=\dfrac{1}{2}\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\dfrac{1}{2}\log_2 a$.

$-\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}a+\log_2 a=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}a+\dfrac{1}{2}\log_2 a$

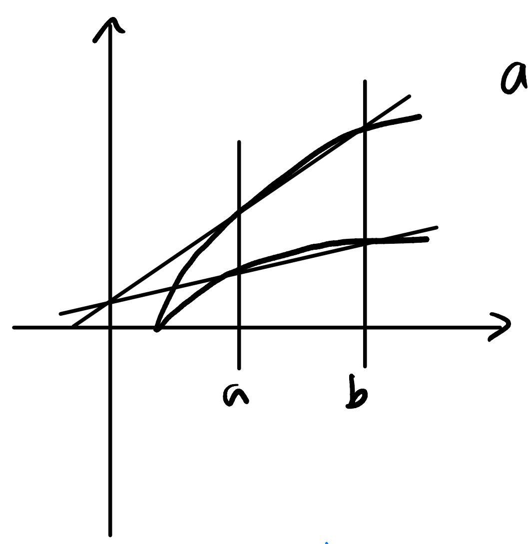
$\dfrac{1}{2}\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}a=\dfrac{1}{2}\log_2 a$

$a\log_2 b-\cancel{a\log_2 a}=b\log_2 a-\cancel{a\log_2 a}$

$\log_2 b^a=\log_2 a^b \quad \therefore b^a=a^b$

$a^{2b}+b^{2a}=400+400=\boxed{800}$

Sol2) 그래프



닮음

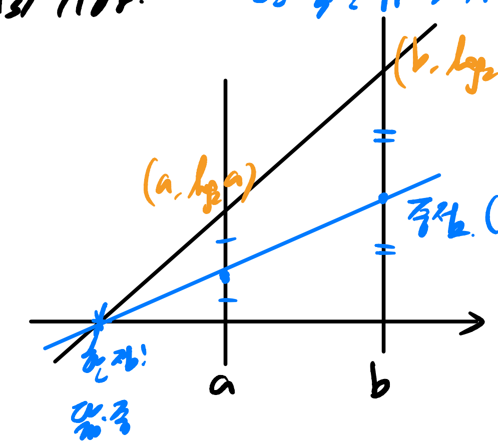
$a:b=\frac{1}{2}\log_2 a:\frac{1}{2}\log_2 b$

$b\log_2 a=a\log_2 b$

$a^b=b^a$.

Sol3) 기하.

한 직선위 ⇒ 기울기 같다.



$\dfrac{\log_2 a}{a}=\dfrac{\log_2 b}{b}$

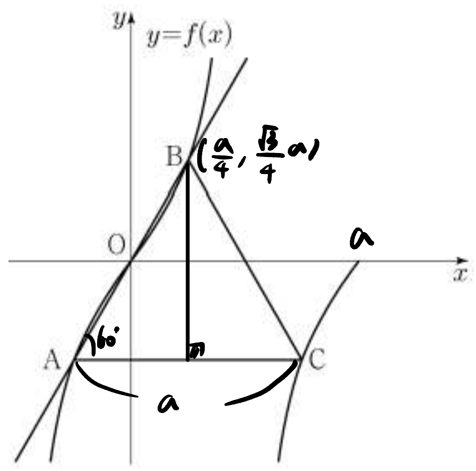
$a^{\frac{1}{a}}=b^{\frac{1}{b}}$

$a^b=b^a$

theme 3. 삼각함수

7. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$가 있다. 그림과 같이 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

주기 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}} = a$



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

2022 수능 11

$\frac{\sqrt{3}}{4}a = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{16}^{4}}{3} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

8. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수

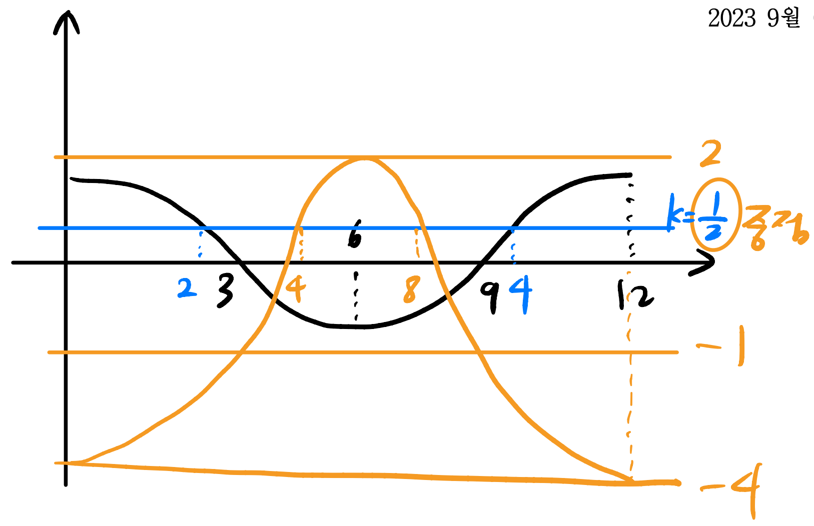
$$f(x) = \cos\frac{\pi x}{6},\ g(x) = -3\cos\frac{\pi x}{6} - 1$$

주기 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$

이 있다. 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1 - \alpha_2| = 8$이다. 곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1 - \beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1 < k < 1$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

2023 9월 09



정의역의 3등분점 中 1개 ⟺ 치역의 절반

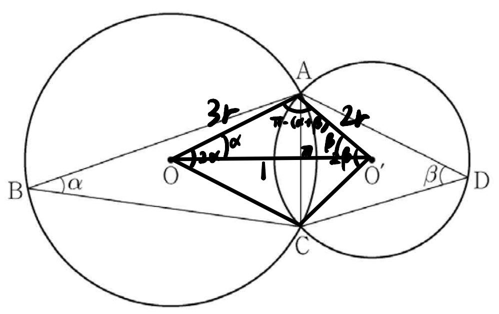
1개!

theme 4. 사인법칙과 코사인법칙

9. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 ∠ABC $=\alpha$, ∠ADC $=\beta$라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2},\quad \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\quad \overline{OO'}=1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2022 예시 21

$$\frac{\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}}{\frac{\overline{AC}}{\sin\beta}}=\frac{3}{2}$$

$1=9r^2+4r^2-12r^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

$=17r^2$

구 $=9\pi r^2=9\pi\times\frac{1}{17}=\frac{9}{17}\pi$

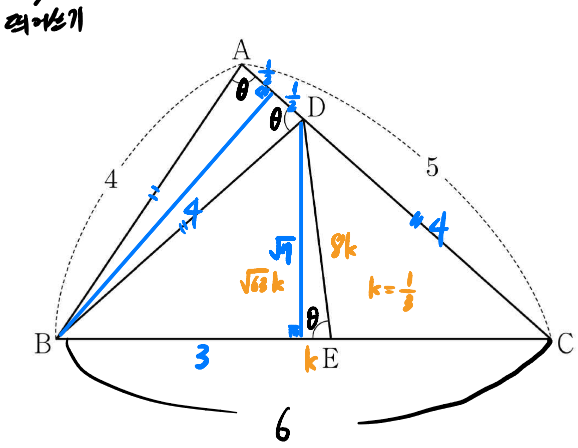
$\boxed{26}$

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC위의 점 D와 선분 BC위의 점 E에 대하여

∠BAC = ∠BDA = ∠BED

일 때, 선분DE의 길이는? [4점]

띄어쓰기



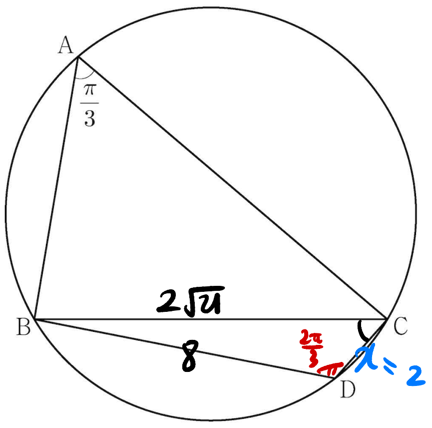
① $\frac{7}{3}$　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{8}{3}$　④ $\frac{17}{6}$　⑤ 3

2022 6월 12

$\overline{BC}^2=16+25-\cancel{40}^{5}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}=36$

11. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은? [4점]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



2022 9월 12

$$\frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{7} \quad \therefore \overline{BC}=2\sqrt{21}$$

$$\frac{\overline{BD}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=4\sqrt{7} \quad \therefore \overline{BD}=8$$

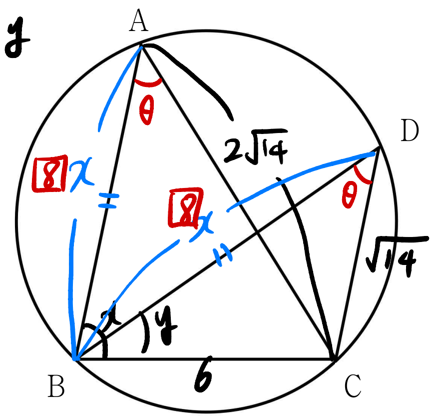
$84=x^2+64-16x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2+8x-20=0$

$x=2$

12. 그림과 같이 $\overline{BC}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 D에 대하여 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 BCD의 넓이의 두 배이고, $\sin(\angle ABC)=2\sin(\angle DBC)$이다. $\overline{CD}=\sqrt{14}$일 때, $\cos(\angle BAC)$의 값은? [4점]

$\sin x=2\sin y$



① $\frac{\sqrt{14}}{16}$ ② $\frac{3\sqrt{14}}{16}$ ③ $\frac{5\sqrt{14}}{16}$ ④ $\frac{7\sqrt{14}}{16}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{14}}{16}$

2021 문참시 자작문제

사인 law

$$\frac{\sqrt{14}}{\sin y}=\frac{2\sqrt{14}}{\sin x}$$

넓이 $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot \overline{AB}\cdot\sin x=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\overline{BD}\sin y$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BD}$

$$\cos\theta=\frac{x^2+56-36}{4\sqrt{14}x}=\frac{x^2+14-36}{2\sqrt{14}x}$$

$x^2+20=2(x^2-22)$

$x^2=64 \quad x=8$

$$\frac{64+14-36}{16\sqrt{14}}=\frac{42}{16\sqrt{14}}=\frac{21\sqrt{14}}{8\cdot 14}=\boxed{\frac{3\sqrt{14}}{16}}$$

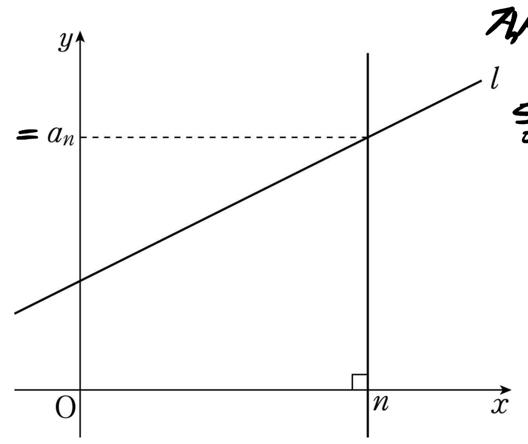
theme 5. 등차수열

13. 좌표평면에 그림과 같이 직선 l이 있다. 자연수 n에 대하여 점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하자. $a_4 = \frac{7}{2}$, $a_7 = 5$일 때, $\sum_{k=1}^{25} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

$(4, \frac{7}{2})$, $(7, 5)$

직선(1차식)
||
등차

등차 =



2018 3월 나28

$a_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$

$a_1 = 2$, $a_{25} = 14$

$8 \times 25 = 4 \times 50 = \boxed{200}$

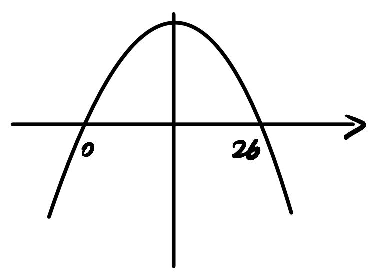
14. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점] 중앙 S_{m+2}

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

2020 수능 나15

$S_n = -2n^2 + 52n$

$= -2n(n-26)$



13
||
m+2

15. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

공차 양수면 불가능

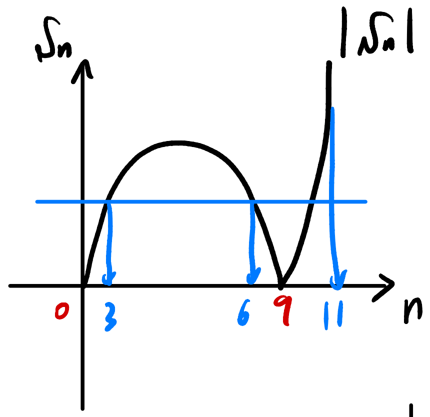
공차 음수

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? [4점]

① $\frac{31}{5}$ ② $\frac{33}{5}$ ③ 7 ④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{39}{5}$

2022 3월 13



$S_n = pn(n-9)$

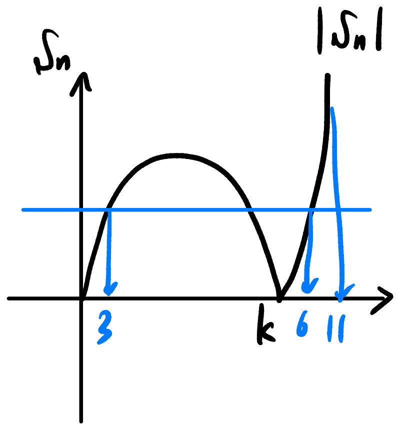
$S_6 = -S_{11} - 3$

$S_6 + S_{11} = -3$

$6p(-3) + 11p \cdot 2 = -3$

$4p = -3 \quad \therefore p = -\frac{3}{4}$

$a_1 = S_1 = -\frac{3}{4} \cdot (-8) = 6$



$S_n = qn(n - \cancel{k})$ 5

① $S_3 = -S_6$; $S_3 + S_6 = 0$

$3q(3-k) + 6q(6-k) = 0$

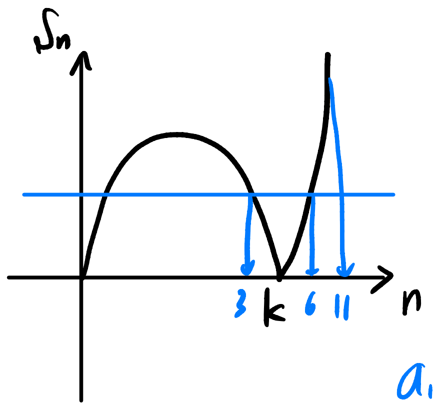
$3 - k + 12 - 2k = 0$

$k = 5$

② $-S_6 = -S_{11} - 3$

$-6q = -11q \cdot 6 - 3$

$60q = -3 \quad q = -\frac{1}{20}$



$a_1 = S_1 = -\frac{1}{20} \cdot (-4) = \frac{1}{5}$

16. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다.
> (나) $a_8 - a_3 = 73$

$\sum_{k=1}^{m} a_k < 0$을 만족시키는 자연수 m의 최댓값을 구하시오. [4점]

2022-2 문참시 자작문제

$(a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) = a_{n+2} - a_n = 3$

홀수칸 / 짝수칸

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$\cancel{a_9}$	a_{10}	a_{11}
k	l	$k+3$	$l+3$	$k+6$	$l+6$	$k+9$	$l+9$			
-33	34	-30	37	-27	40	-24	43	-21		

$\underbrace{-33\ \ 34}_{1}$ $\underbrace{-30\ \ 37}_{7}$ $\underbrace{-27\ \ 40}_{13}$ $\underbrace{-24\ \ 43}_{19}$

3+6

$k + l = 1$

(나) $(l+9) - (k+3) = l - k + 6 = 73$

$l - k = 67$

$k = -33,\ l = 34$

$\boxed{7}$

theme 1. 지수와 로그

1. ②
2. 27
3. 75

theme 2. 지수함수와 로그함수

4. ③
5. ④
6. ②

theme 3. 삼각함수

7. ③
8. ③

theme 4. 사인법칙과 코사인법칙

9. 26
10. ③
11. ~~③~~ ②
12. ②

theme 5. 등차수열

13. 200
14. ④
15. ①
16. 7