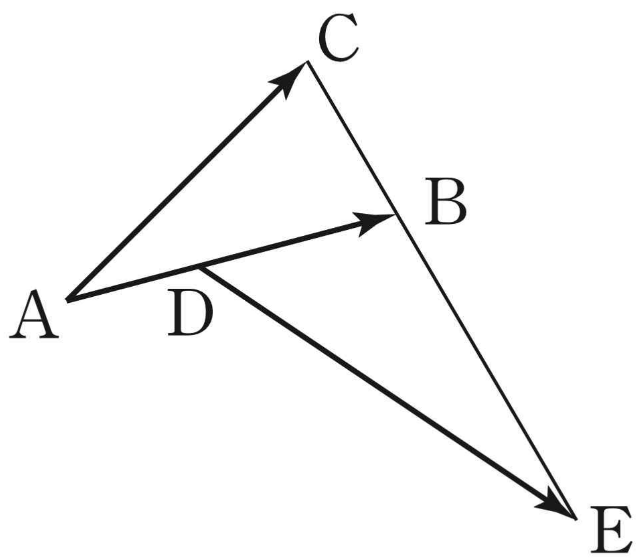
평면벡터의 성분과 내적 유제 1번

그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 D, 변 BC를 $2:3$으로 외분하는 점을 E라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

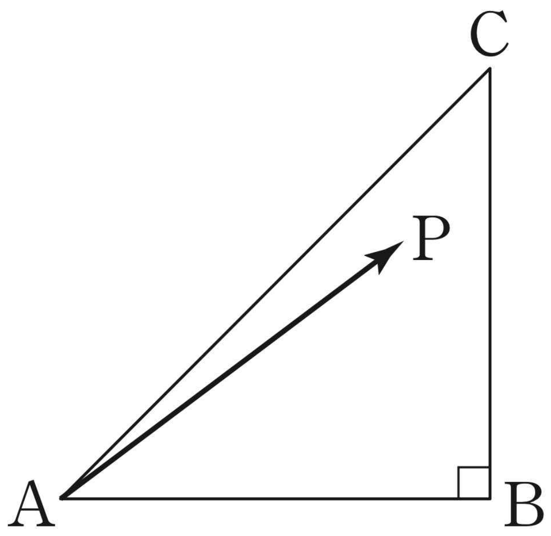
① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



평면벡터의 성분과 내적 유제 2번

그림과 같이 $\overline{AB} = 4$이고 $\angle B = 90°$인 직각이등변삼각형 ABC와 그 내부의 점 P가 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AP}|$의 값은?

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5



평면벡터의 성분과 내적 유제 3번

세 벡터 $\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(-2,2)$, $\vec{c}=(-7,3)$에 대하여 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$일 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 실수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

평면벡터의 성분과 내적 유제 4번

좌표평면에서 세 점 $\mathrm{A}(3, 4)$, $\mathrm{B}(-2, 1)$, $\mathrm{C}(0, -2)$에 대하여 점 $\mathrm{D}(a, b)$가 $\overrightarrow{\mathrm{DA}} - \overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \vec{0}$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

평면벡터의 성분과 내적 유제 5번

두 벡터 $\vec{a}=(5, x)$, $\vec{b}=(-2, 2)$에 대하여 $(\vec{a}+2\vec{b}) \cdot \vec{b}=7$일 때, 실수 x의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

평면벡터의 성분과 내적 유제 6번

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(4, 0)$, $\mathrm{B}(0, -2)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$을 만족시키는 점 P와 점 A 사이의 거리의 최댓값은?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

평면벡터의 성분과 내적 유제 7번

두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=3$을 만족시킬 때, $(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

평면벡터의 성분과 내적 유제 8번

두 벡터 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (k, -k)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°일 때, k^2의 값은? (단, k는 실수이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

평면벡터의 성분과 내적 유제 9번

좌표평면에서 점 $(-2, a)$를 지나고 직선 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}$과 평행한 직선을 l이라 하자. 직선 l이 점 $(0, 6)$을 지날 때, a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

평면벡터의 성분과 내적 유제 10번

좌표평면 위의 네 점 O$(0, 0)$, A$(-1, 0)$, B$(4, 0)$, P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$라 하자.

$$\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}=0$$

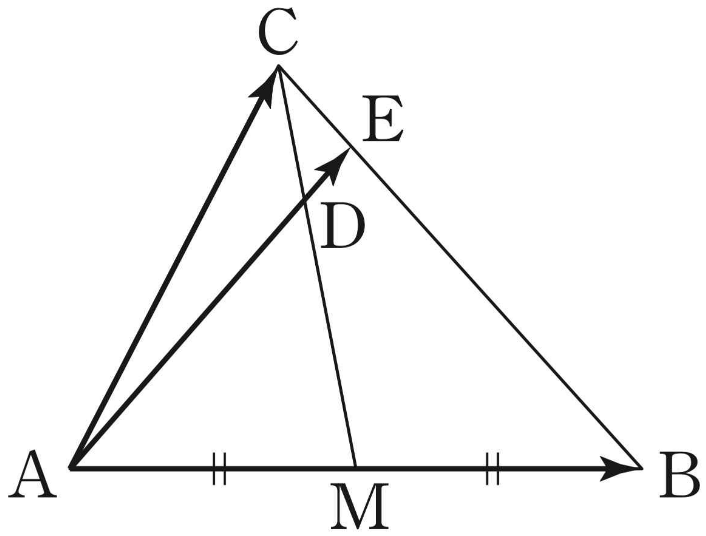
을 만족시키는 점 P에 대하여 삼각형 OBP의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 P는 x축 위의 점이 아니다.)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 1번

그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 AB의 중점을 M, 선분 CM을 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AD의 연장선이 변 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = a\overrightarrow{\mathrm{AB}} + b\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -1 ② $-\frac{4}{5}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$



평면벡터의 성분과 내적 Level 1 2번

두 벡터 $\vec{a}=(3, 1)$, $\vec{b}=(1, -2)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 3번

좌표평면 위의 두 점 $A(3, 2)$, $B(-1, 5)$에 대하여 평면벡터 $\vec{p}$가 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 반대 방향이고 $|\vec{p}| = 10$을 만족시킬 때, 벡터 $\vec{p}$의 모든 성분의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

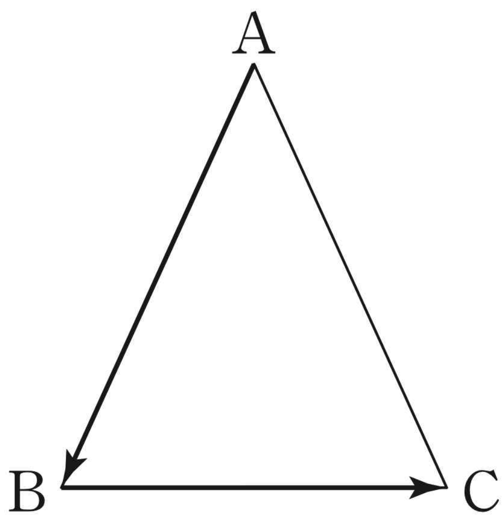
평면벡터의 성분과 내적 Level 1 4번

좌표평면에서 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ 위의 점 P와 세 점 $\mathrm{A}(4,1)$, $\mathrm{B}(5,0)$, $\mathrm{C}(6,-4)$에 대하여 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$의 최댓값을 구하시오.

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 5번

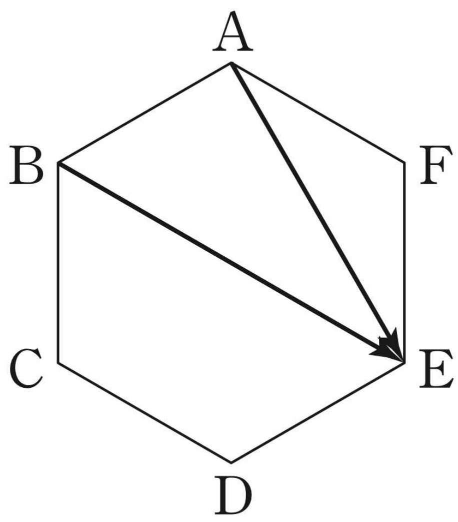
그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에 대하여 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-3$일 때, 선분 BC의 길이는?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ $\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{6}$



평면벡터의 성분과 내적 Level 1 6번

그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정육각형 ABCDEF에 대하여 $\left|2\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2$의 값을 구하시오.



평면벡터의 성분과 내적 Level 1 7번

두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$이고 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-3\vec{b}$가 서로 수직이다. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$)

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　③ 0　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 8번

두 벡터 $\vec{a}=(3, 2x-1)$, $\vec{b}=(-x, 2)$가 서로 수직일 때, 실수 x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 9번

좌표평면에서 두 직선 $\frac{x+1}{4}=\frac{2-y}{3}$, $\frac{x-3}{2}=y-1$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 10번

좌표평면에서 두 점 A$(2, 1)$, P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$라 하자. $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = k$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 직선 $y = x - 2$가 접하도록 하는 양수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 1번

한 평면에서 길이가 15인 선분 AB의 중점을 C, 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 할 때, 직선 AB 위에 있지 않은 세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{AQ}+3\overrightarrow{PA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DQ}+3\overrightarrow{RD}=\vec{0}$
(나) $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{DR}=0$

$\overline{AP}=4$일 때, 삼각형 CBR의 넓이를 구하시오.

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 2번

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 실수 t에 대하여 $|2\vec{a}-t\vec{b}|^2$의 값은 $t=\frac{1}{2}$에서 최소일 때, $|2\vec{a}-\vec{b}|^2$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 3번

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 모든 실수 t에 대하여 $|\vec{a}+t\vec{b}|\geq 1$을 만족시킨다. $|\vec{a}-\vec{b}|$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{15}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 4번

실수 k에 대하여 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert\vec{a}\rvert = 2$, $\lvert\vec{b}\rvert = 5$ (나) $\vec{a} \cdot \vec{b}$의 최댓값은 10이고 최솟값은 k이다.

$\left|\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, m보다 크고 M보다 작은 자연수의 개수가 1이 되도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 5번

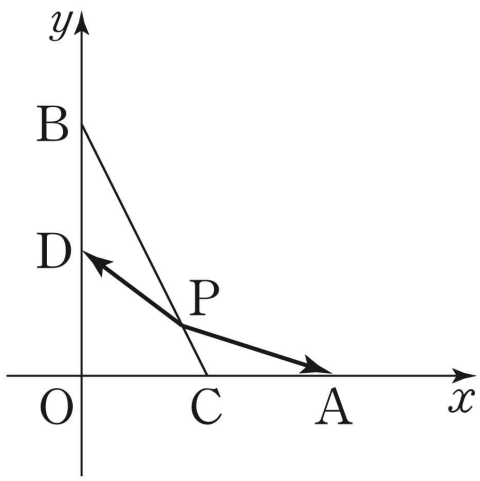
좌표평면에서 점 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$과 직선 $y=-2x+1$ 위의 점 중 A가 아닌 점 B에 대하여 y축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값은?

① $\frac{5}{2}$　　② 3　　③ $\frac{7}{2}$　　④ 4　　⑤ $\frac{9}{2}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 6번

좌표평면에서 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$에 대하여 두 선분 OA, OB의 중점을 각각 C, D라 하자. 선분 BC 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD}$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1



평면벡터의 성분과 내적 Level 2 7번

좌표평면에서 $\vec{u} = (1, 0)$이고 이고 곡선 $y = x^2 + 2$ 위의 점 P에 대하여 $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$라 하자. 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$라 할 때, $\cos\theta$의 최솟값은?
(단, O는 원점이다.)

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 8번

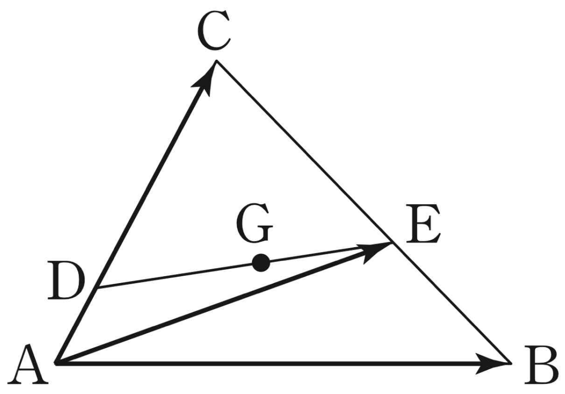
좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(-a, 3)$, $\mathrm{B}(a, 2)$, $\mathrm{C}(b, 2)$, $\mathrm{D}(2b, 1)$에 대하여 $a < b$이고 두 직선 AB, CD가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$의 최솟값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 3 1번

그림과 같이 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 변 AC를 1:3으로 내분하는 점을 D라 하자. 직선 DG가 변 BC와 만나는 점을 E라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 만족시키는 두 실수 p, q에 대하여 $p-q$의 값은?

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$



평면벡터의 성분과 내적 Level 3 2번

좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 각각 2, $2\sqrt{3}$인 두 원을 O_1, O_2라 하자. 원 O_1 위의 세 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$, $\mathrm{B}(2, 0)$, C와 원 O_2 위의 점 D가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$를 만족시킨다. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$라 할 때, $\cos\theta$의 값은?
(단, 점 C의 y좌표는 양수이다.)

① $-\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ ③ $-\dfrac{3\sqrt{2}}{7}$ ④ $-\dfrac{\sqrt{15}}{7}$ ⑤ $-\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 3 3번

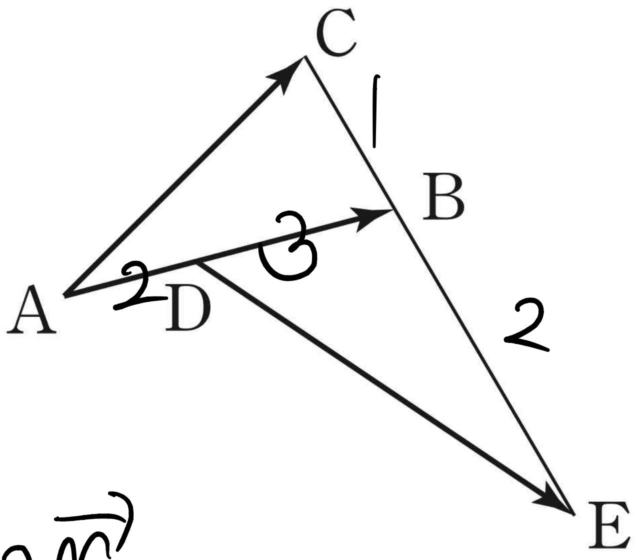
t가 양수일 때, 원 $(x-2t)^2+(y+t)^2=t^2$ 위의 점 P와 점 A$(3,4)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q, 최솟값을 $f(t)$라 하자. 점 R$(t, f(t))$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OR}} > 340$을 만족시키는 자연수 t의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

평면벡터의 성분과 내적 유제 1번

그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 AB를 2:3으로 내분하는 점을 D, 변 BC를 2:3으로 외분하는 점을 E라 할 때, $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



$$\overrightarrow{AE} = \frac{3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}}{3-2}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

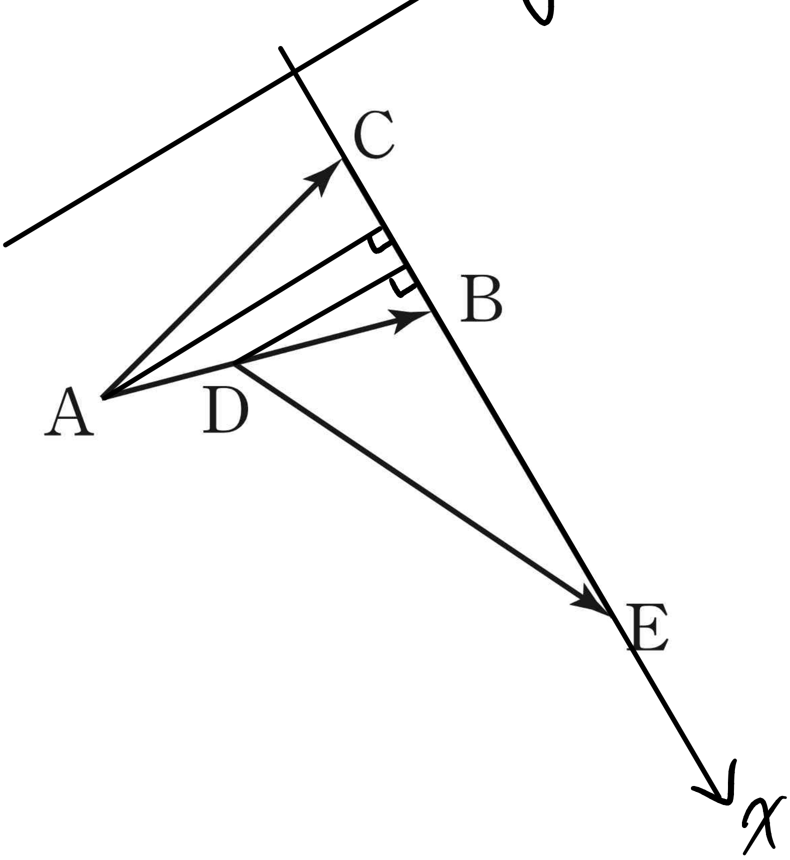
$$3 - 2 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

☆ 다른 풀이 $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ 꼴이고, $m+n$을 물었을 때
$\vec{a}, \vec{b}$의 x성분 또는 y성분이 같다면
(같게 되도록 좌표축을 설정해줄 수 있다면)

평면벡터의 성분과 내적 유제 1번

그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 AB를 2:3으로 내분하는 점을 D, 변 BC를 2:3으로 외분하는 점을 E라 할 때, $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



A와 직선 CE 사이 거리 : D와 직선 CE 사이 거리

$= 5 : 3$

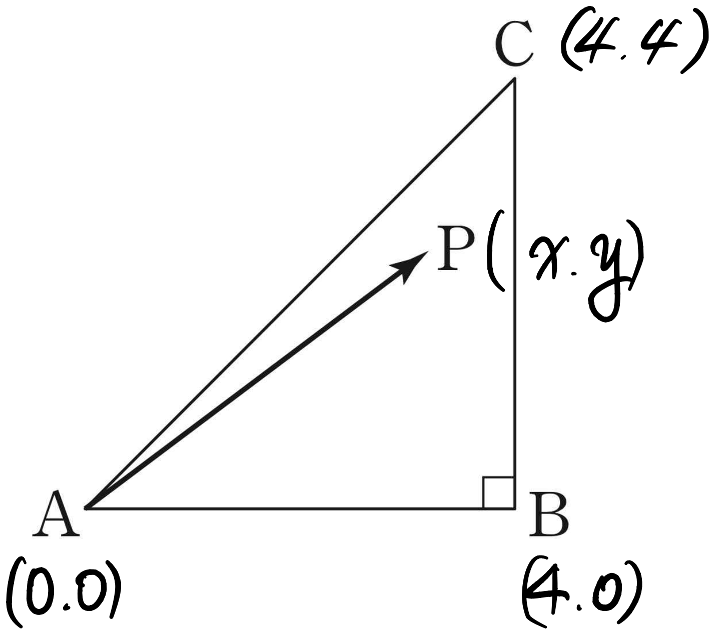
$\therefore \overrightarrow{AB} = (?, 5)$ $\overrightarrow{AC} = (?, 5)$

$\overrightarrow{DE} = (?, 3)$ $\longrightarrow$ $5m + 5n = 3$

평면벡터의 성분과 내적 유제 2번

그림과 같이 $\overline{AB}=4$이고 $\angle B = 90^{\circ}$ 인 직각이등변삼각형 ABC와 그 내부의 점 P가 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AP}|$의 값은?

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

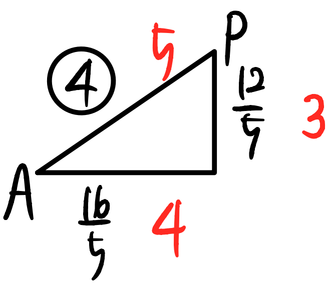


$$(x, y) = (4-x, -y) + 3(4-x, 4-y)$$

$$= (16-4x, 12-4y)$$

$$\therefore x = \frac{16}{5},\quad y = \frac{12}{5}$$

④



평면벡터의 성분과 내적 유제 3번

세 벡터 $\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(-2,2)$, $\vec{c}=(-7,3)$에 대하여 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$일 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 실수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$-7 = 3m - 2n$

$3 = m + 2n$

$\therefore m=-1 \quad n=2$

평면벡터의 성분과 내적 유제 4번

좌표평면에서 세 점 A$(3, 4)$, B$(-2, 1)$, C$(0, -2)$에 대하여 점 D(a, b)가 $\overrightarrow{\mathrm{DA}} - \overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \vec{0}$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC}$

$= (5.3) + (0.-2)$

$= (5.1)$

평면벡터의 성분과 내적 유제 5번

두 벡터 $\vec{a}=(5,x)$, $\vec{b}=(-2,2)$에 대하여 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{b}=7$일 때, 실수 x의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

$(1,\ x+4)\cdot(-2,\ 2)$

$= -2+2x+8$

$= 2x+6=7$

평면벡터의 성분과 내적 유제 6번

좌표평면에서 두 점 $A(4, 0)$, $B(0, -2)$에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$을 만족시키는 점 P와 점 A 사이의 거리의 최댓값은?

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$　④ 4　⑤ $2\sqrt{5}$

P : $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위의 점

$\overline{AP} \le \overline{AB} = 2\sqrt{5}$

평면벡터의 성분과 내적 유제 7번

두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=3$을 만족시킬 때, $(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 9$

$\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}$

$(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$= |\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= 4-3-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

평면벡터의 성분과 내적 유제 8번

두 벡터 $\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(k,-k)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $60°$일 때, k^2의 값은? (단, k는 실수이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$$\cos 60° = \frac{(1+k,\ 1-k)\cdot(1-k,\ 1+k)}{\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}\times\sqrt{(1-k)^2+(1+k)^2}} = \frac{2\times(1-k^2)}{2\times(1+k^2)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore k^2 = \frac{1}{3}$$

평면벡터의 성분과 내적 유제 9번

좌표평면에서 점 $(-2, a)$를 지나고 직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}$과 평행한 직선을 l이라 하자. 직선 l이 점 $(0, 6)$을 지날 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$l: \frac{x+2}{2} = \frac{y-a}{3}$$

$$1 = \frac{6-a}{3}$$

평면벡터의 성분과 내적 유제 10번

좌표평면 위의 네 점 O$(0, 0)$, A$(-1, 0)$, B$(4, 0)$, P에 대하여 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$라 하자.

$$\vec{p} \cdot \vec{p} - 2\vec{p} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

을 만족시키는 점 P에 대하여 삼각형 OBP의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 P는 x축 위의 점이 아니다.)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$\vec{p} = (x, y)$ $y \neq 0$

$|\vec{p}|^2 + 2x - 8 - 16 = 0$

$(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 25$

$(x+1)^2 + y^2 = 5^2$

삼각형 OBP 넓이

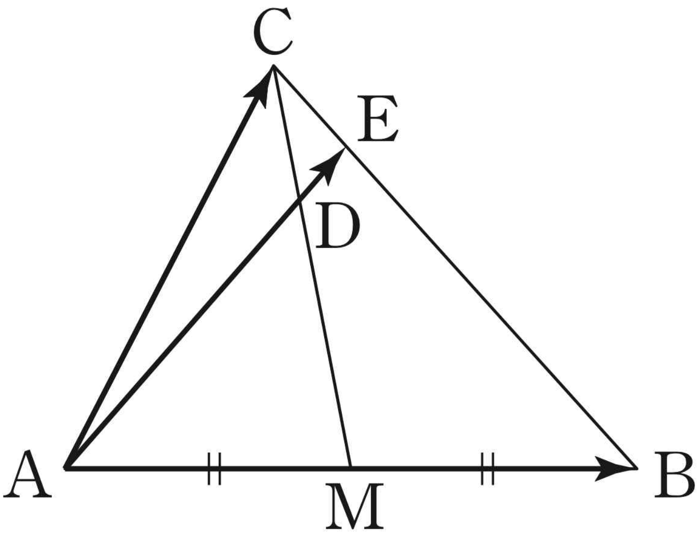
$= \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times |y| \le 10$ ($|y| = 5$일 때 최대)

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 1번

그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 AB의 중점을 M, 선분 CM을 1:2로 내분하는 점을 D, 선분 AD의 연장선이 변 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -1　　② $-\frac{4}{5}$　　③ $-\frac{3}{5}$　　④ $-\frac{2}{5}$　　⑤ $-\frac{1}{5}$

$a+b=1$



$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = a'\overrightarrow{AB} + b'\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE} = t \times \overrightarrow{AD}$$

$$(a+b) = t \times (a'+b') = 1 \longrightarrow t = \frac{6}{5}$$

$$(a-b) = t \times (a'-b') = \frac{6}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{5}$$

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 2번

두 벡터 $\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(1,-2)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은?

① 1　　4　② 2　-1　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

4 -2 =2

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 3번

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(3, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 5)$에 대하여 평면벡터 $\vec{p}$가 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 반대 방향이고 $|\vec{p}| = 10$을 만족시킬 때, 벡터 $\vec{p}$의 모든 성분의 합은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

$\overrightarrow{AB} = (-4.\ 3)$

$|\overrightarrow{AB}| = 5$

$\vec{p} = -2\overrightarrow{AB}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 4번

좌표평면에서 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ 위의 점 P와 세 점 A$(4,1)$, B$(5,0)$, C$(6,-4)$에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$의 최댓값을 구하시오.

원 중심 D$(1,2)$

삼각형 ABC 무게중심 G$(5,-1)$

$3|\overrightarrow{PG}|$ 의 Max

$= 3 \times |\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DG}|$ 의 Max

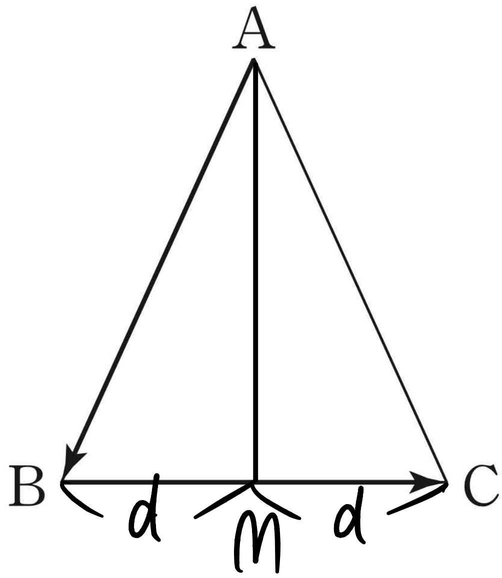
$= 3 \times \left(|\overrightarrow{PD}|+|\overrightarrow{DG}|\right)$

$= 3 \times (4+5) = 27$

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 5번

그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에 대하여 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -3$일 때, 선분 BC의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$



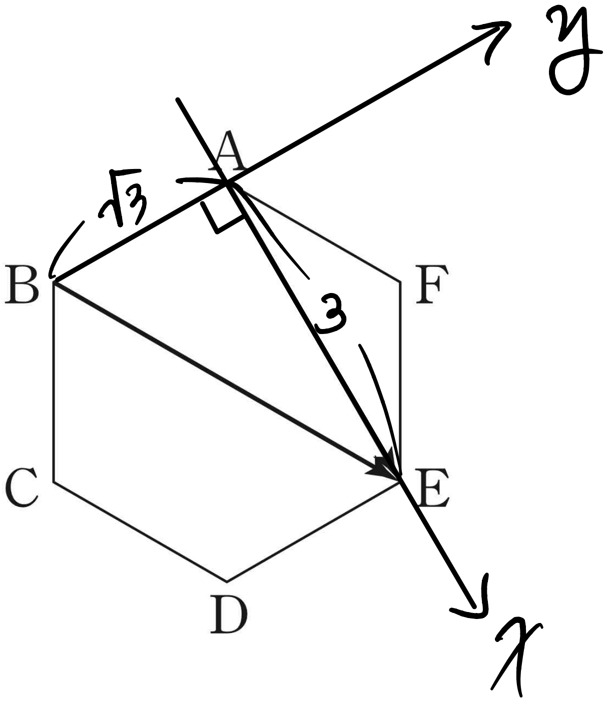
$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2d^2 = -3$$

$$\therefore 4d^2 = 6$$

$$2d = \sqrt{6}$$

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 6번

그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정육각형 ABCDEF에 대하여 $|2\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}|^2$의 값을 구하시오.

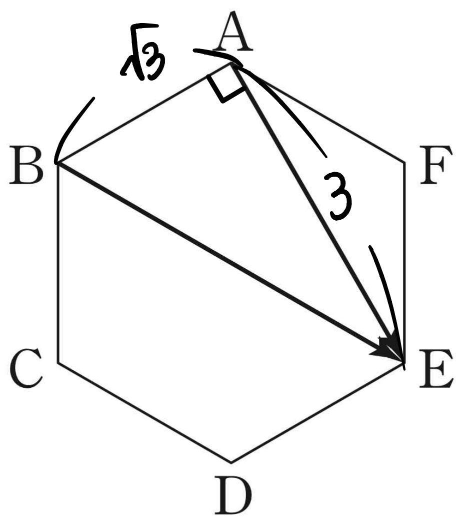


$\overrightarrow{AE} = (3, 0)$ $\quad$ $\overrightarrow{BE} = (3, \sqrt{3})$

$|(9, \sqrt{3})|^2 = \boxed{84}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 6번

그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정육각형 ABCDEF에 대하여 $|2\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}|^2$의 값을 구하시오.



$$4|\overrightarrow{AE}|^2 + |\overrightarrow{BE}|^2 + 4\,\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$$

$$4\times 9 + 12 + 4\,|\overrightarrow{AE}|^2$$

$$= 36 + 12 + 36 = \boxed{84}$$

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 7번

두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$이고 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-3\vec{b}$가 서로 수직이다. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0° \le \theta \le 180°$)

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$$

$$=|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=4-3-4\cos\theta=0$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{1}{4}$$

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 8번

두 벡터 $\vec{a}=(3, 2x-1)$, $\vec{b}=(-x, 2)$가 서로 수직일 때, 실수 x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -3x+4x-2 = 0 \quad \therefore x=2$

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 9번

좌표평면에서 두 직선 $\frac{x+1}{4}=\frac{2-y}{3}$, $\frac{x-3}{2}=y-1$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

l_1 l_2

① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{l_1}=(4,-3)$ $\vec{l_2}=(2,1)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}|}{|\vec{l_1}||\vec{l_2}|}=\frac{5}{5\sqrt{5}}$$

평면벡터의 성분과 내적 Level 1 10번

좌표평면에서 두 점 A$(2, 1)$, P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$라 하자. $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=k$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 직선 $y=x-2$가 접하도록 하는 양수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)

l

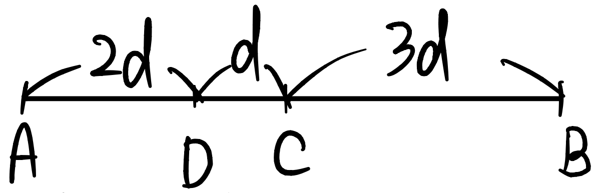
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$|\overrightarrow{AP}|^2=k$

P : A를 중심으로 하고 반지름 길이가 $\sqrt{k}$ 인 원

A와 직선 l 사이 거리 $\sqrt{k}$

$\therefore \sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{2}}$



$6d=15 \rightarrow d=\frac{5}{2}$

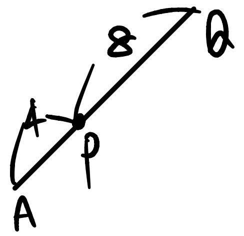
평면벡터의 성분과 내적 Level 2 1번

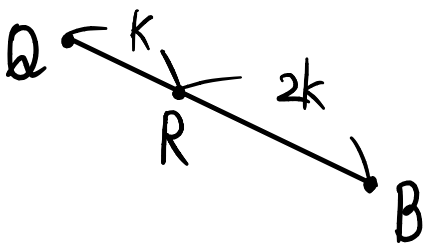
한 평면에서 길이가 15인 선분 AB의 중점을 C, 선분 AC를 2:1로 내분하는 점을 D라 할 때, 직선 AB 위에 있지 않은 세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

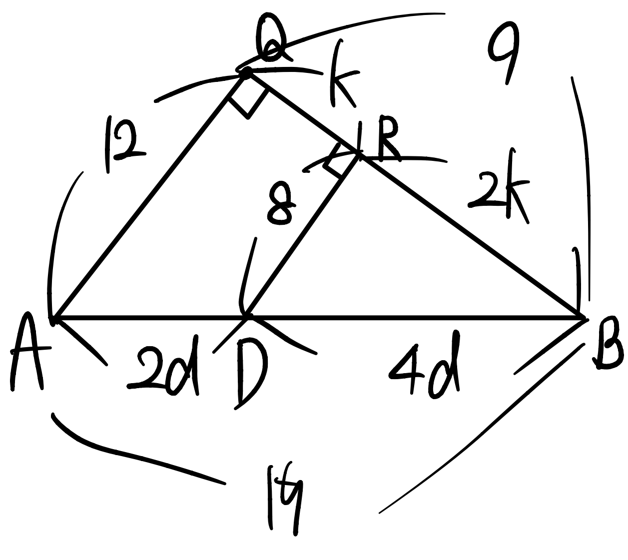
(가) $\overrightarrow{AQ}+3\overrightarrow{PA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DQ}+3\overrightarrow{RD}=\vec{0}$ (나) $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{DR}=0$

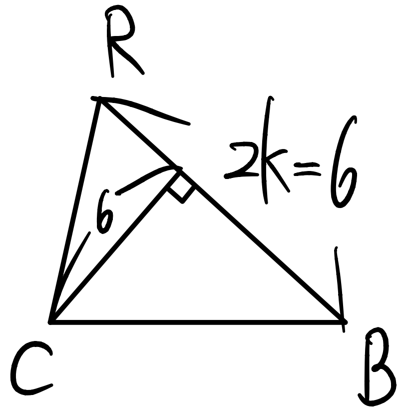
$\overline{AP}=4$일 때, 삼각형 CBR의 넓이를 구하시오.

$\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AP}$ $\qquad \overrightarrow{DR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DQ}$









$\boxed{18}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 2번

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 실수 t에 대하여 $|2\vec{a}-t\vec{b}|^2$의 값은 $t=\frac{1}{2}$에서 최소일 때, $|2\vec{a}-\vec{b}|^2$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$4|\vec{a}|^2 + t^2|\vec{b}|^2 - 4t\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= 4t^2 - 4\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,t + 4 \quad = 4t^2 - 4t + 4\Big|_{t=1} = 4$$

$$= 4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + k$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$$

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 3번

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 모든 실수 t에 대하여 $|\vec{a}+t\vec{b}|\geq 1$을 만족시킨다. $|\vec{a}-\vec{b}|$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{15}$

$$|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+2t\,\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 1$$

$$t^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\,t+2\geq 1$$

$$t^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\,t+1\geq 0$$

$$4(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-4\leq 0$$

$$-1\leq\vec{a}\cdot\vec{b}\leq 1$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=3-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

최대 5

최소 1

$$\sqrt{5}\times\sqrt{1}=\sqrt{5}$$

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 4번

실수 k에 대하여 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$

(나) $\vec{a} \cdot \vec{b}$의 최댓값은 10이고 최솟값은 k이다.

$\left|\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, m보다 크고 M보다 작은 자연수의 개수가 1이 되도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$$\left|\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= 26 - \vec{a}\cdot\vec{b}$$

최대 $26-k = M^2$

최소 $16 = m^2$

$m=4$ $M=\sqrt{26-k}$

$5 < M \le 6$

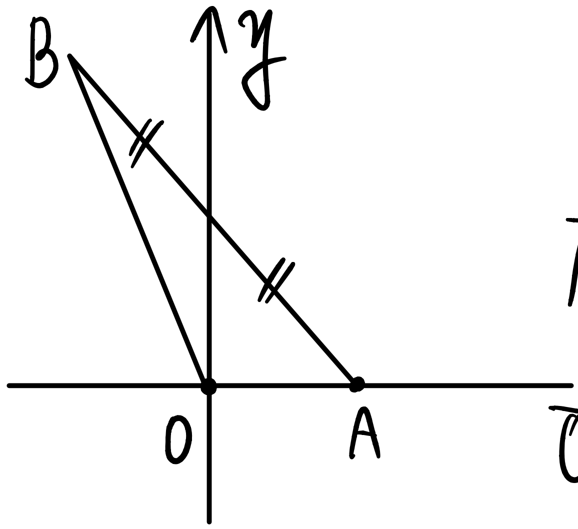
$25 < 26-k \le 36$

$-10 \le k < 1$

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 5번

좌표평면에서 점 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$과 직선 $y=-2x+1$ 위의 점 중 A가 아닌 점 B에 대하여 y축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분할 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$



$B\left(-\frac{1}{2}.\ 2\right)$

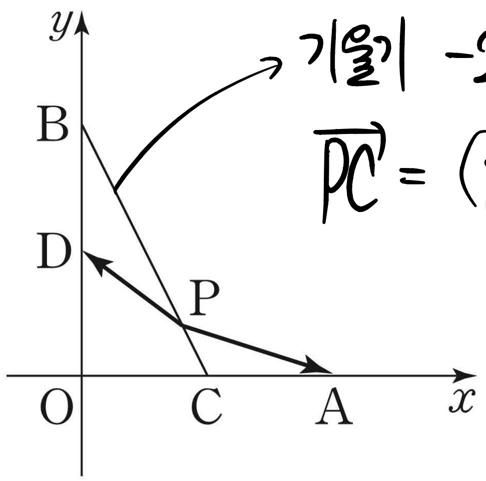
$\overrightarrow{AB} = (-1.\ 2)$

$\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{1}{2}.\ 2\right)$

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 6번

좌표평면에서 두 점 A(2, 0), B(0, 2)에 대하여 두 선분 OA, OB의 중점을 각각 C, D라 하자. 선분 BC 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1



기울기 -2

$\overrightarrow{PC}=(p, -2p)$ $0\le p\le 1$

$$(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD})$$

$$=|\overrightarrow{PC}|^2+\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}$$

$$=|\overrightarrow{PC}|^2+\overrightarrow{PC}\cdot(0, 1)-1$$

$$=5p^2-2p-1$$

$$=5\left(p-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{6}{5}$$

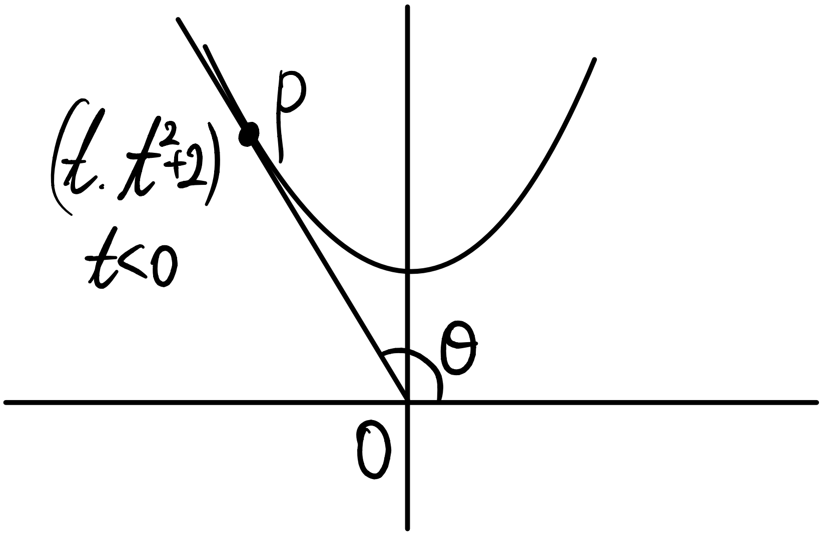
$p=1$ 일 때 최대 2, $p=\frac{1}{5}$일 때 최소 $-\frac{6}{5}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 7번

좌표평면에서 $\vec{u}=(1,0)$이고 이고 곡선 $y=x^2+2$ 위의 점 P에 대하여 $\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$라 하자. 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$라 할 때, $\cos\theta$의 최솟값은?
(단, O는 원점이다.)

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

직선 OP 기울기 $\tan\theta$



(P에서의 접선 기울기) $2t = \dfrac{t^2+2}{t}$ (직선 OP 기울기)

$t^2=2$, $t=-\sqrt{2}$

$P(-\sqrt{2}, 4)$ $\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 2 8번

좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(-a, 3)$, $\mathrm{B}(a, 2)$, $\mathrm{C}(b, 2)$, $\mathrm{D}(2b, 1)$에 대하여 $a < b$이고 두 직선 AB, CD가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$의 최솟값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　② 1　　③ $\sqrt{2}$　　④ 2　　⑤ $2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB} = (2a, -1) \quad \overrightarrow{CD} = (b, -1)$

$2ab = -1 \quad a = -\frac{1}{2b}$

$a < 0 < b$

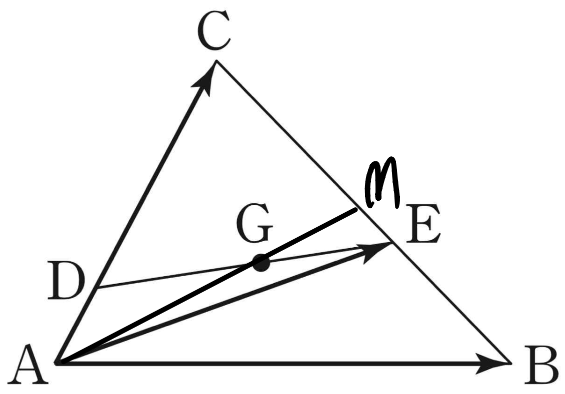
$b - a = b + \frac{1}{2b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$p=\frac{3}{5}$ $q=\frac{2}{5}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 3 1번

그림과 같이 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 변 AC를 1:3으로 내분하는 점을 D라 하자. 직선 DG가 변 BC와 만나는 점을 E라 할 때, $\overrightarrow{AE}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 두 실수 p, q에 대하여 $p-q$의 값은?

① $-\frac{2}{5}$　　② $-\frac{1}{5}$　　③ 0　　④ $\frac{1}{5}$　　⑤ $\frac{2}{5}$



$p+q=1$

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}+t\,\overrightarrow{DG}$

$=\frac{1+t}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4+t}{12}\overrightarrow{AC}$, $\left(\frac{1}{3}+\frac{t}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{t}{12}\right)=\frac{1}{4}t$

$\frac{8+5t}{12}=1$ $\therefore t=\frac{4}{5}$, $\frac{1}{4}t=\frac{1}{5}$

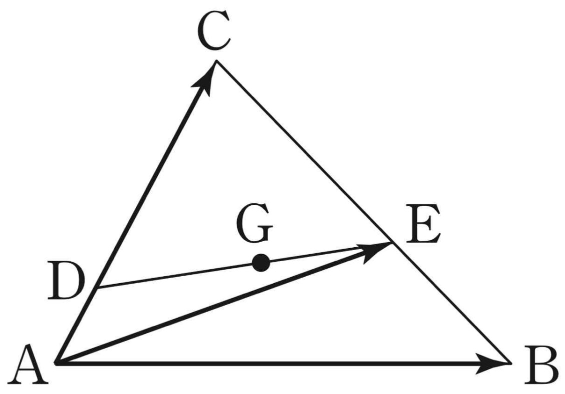
삼각형 ABC 모양에 제한 없음.

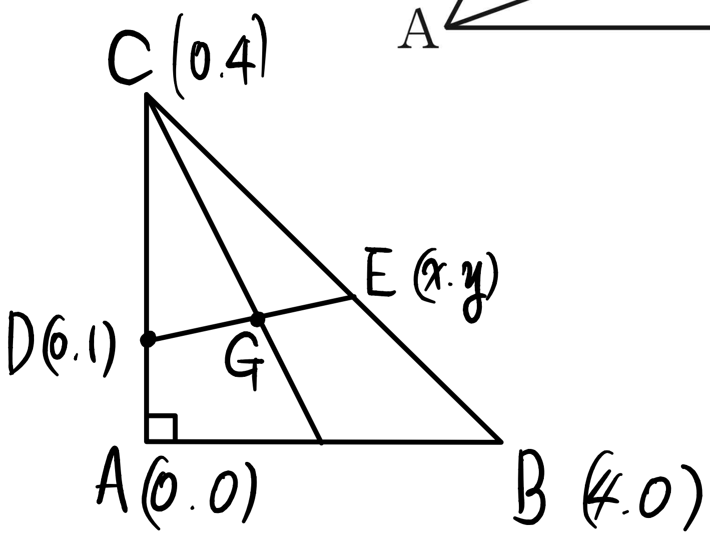
⟶ 내가 생각하기 편한 대로 다시 그리자.

평면벡터의 성분과 내적 Level 3 1번

그림과 같이 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 변 AC를 1:3으로 내분하는 점을 D라 하자. 직선 DG가 변 BC와 만나는 점을 E라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 만족시키는 두 실수 p, q에 대하여 $p-q$의 값은?

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$





$x+y=4$

$\frac{x-y}{4} = ?$

G $\left(\frac{4}{3}. \frac{4}{3}\right)$ 직선 DG 기울기 $\frac{1}{4}$

$\therefore$ E $(4t. 1+t)$

$5t+1=4 \longrightarrow t=\frac{3}{5}$

$\frac{x-y}{4} = \frac{3t-1}{4} = \frac{1}{5}$

평면벡터의 성분과 내적 Level 3 2번

좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 각각 2, $2\sqrt{3}$인 두 원을 O_1, O_2라 하자. 원 O_1 위의 세 점 A$(-2, 0)$, B$(2, 0)$, C와 원 O_2 위의 점 D가 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$를 만족시킨다. 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 C의 y좌표는 양수이다.)

① $-\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $-\frac{\sqrt{21}}{7}$ ③ $-\frac{3\sqrt{2}}{7}$ ④ $-\frac{\sqrt{15}}{7}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{7}$

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$$

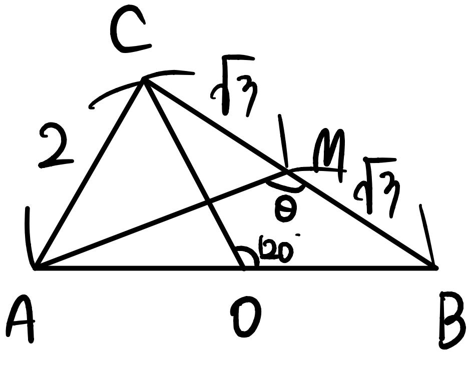
$$\longrightarrow 2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$$

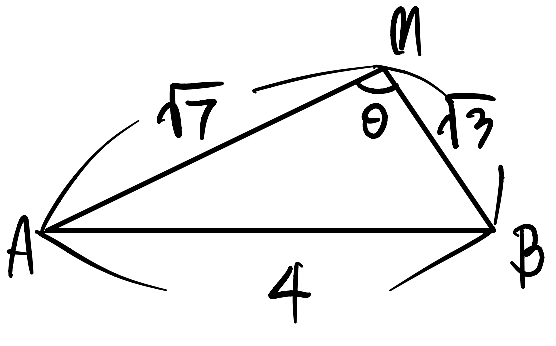
$$|2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OD}|^2=12$$

$$4|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+4\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=20+4\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=12$$

$$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-2$$

$\overline{BC}$ 중점 M $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$





$$\cos\theta=\frac{7+3-16}{2\sqrt{7}\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{21}}{7}$$

$C(2t, -t)$

평면벡터의 성분과 내적 Level 3 3번

t가 양수일 때, 원 $(x-2t)^2+(y+t)^2=t^2$ 위의 점 P와 점 A$(3,4)$에 대하여 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q, 최솟값을 $f(t)$라 하자. 점 R$(t, f(t))$에 대하여 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR} > 340$을 만족시키는 자연수 t의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CP}$$

$$\geq 2t - |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{CP}| = -3t \qquad f(t) = -3t$$

$$\overrightarrow{CQ} = -\frac{t}{5}\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OR} - \frac{t}{5}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OR}$$

$$= (2t, -t) \cdot (t, -3t) - \frac{t}{5}(3, 4) \cdot (t, -3t)$$

$$= 5t^2 + \frac{9}{5}t^2$$

$$= \frac{34}{5}t^2 > 340$$

$$\longrightarrow \quad t^2 > 50$$