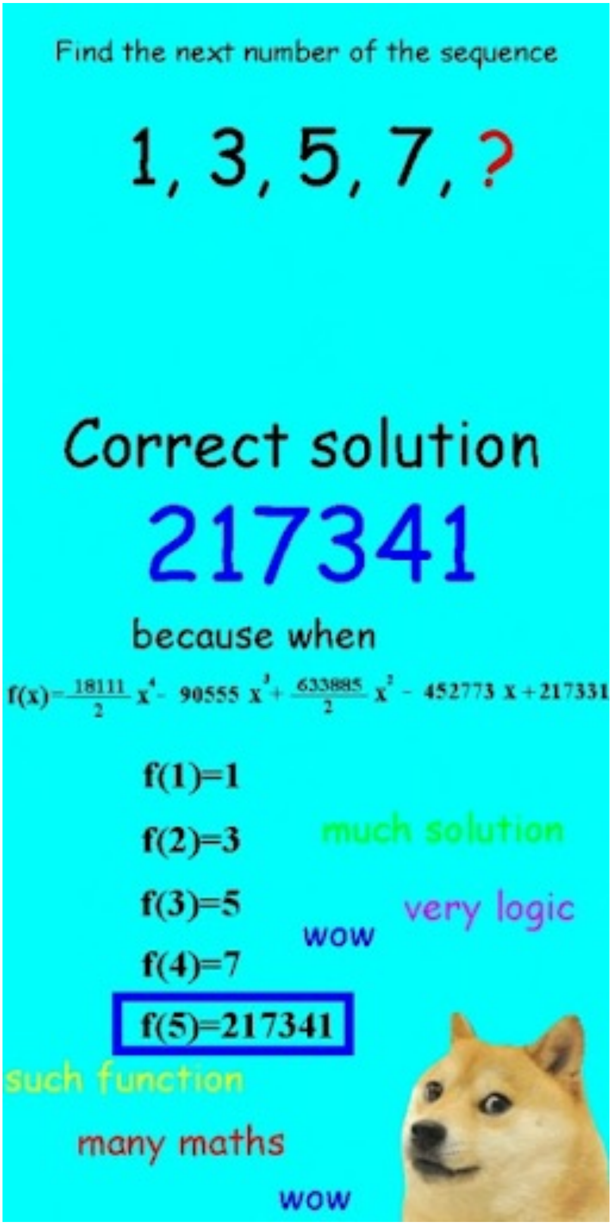
22학년도 수능 기하 해설



xyo
889268

22학년도 수능 기하 8문제 해설입니다.
정시 원서 시즌 끝날 때쯤 되면 올리려고 계획해두고 있었습니다.
23번 문제 → 23번 해설 → 24번 문제 → 24번 해설 ...
이런 식으로 30번까지 진행됩니다.

아직 22학년도 수능을 안 풀어보셨다면 따로 시간 재서(공통과목까지) 풀어보신 후에 이 파일을 읽으시면 좋겠습니다.
이미 풀어보신 분들도 해설을 읽기 전에 다시 풀어보시면 좋겠습니다.

해설에 쓰인 그림들은 아이패드 손그림입니다. 양해 부탁드립니다. 다 알아보실 수는 있을 것입니다.

30번 문제는 제가 예전에 해설을 써두었는데, 교과 내 풀이와 교과 외 풀이를 모두 다루고 있습니다.
나머지 문제는 해설을 지금 처음 쓰는 것입니다.
나머지 문제들은 해설이 존댓말로, 30번은 예전에 썼던 대로 반말로 진행됩니다.

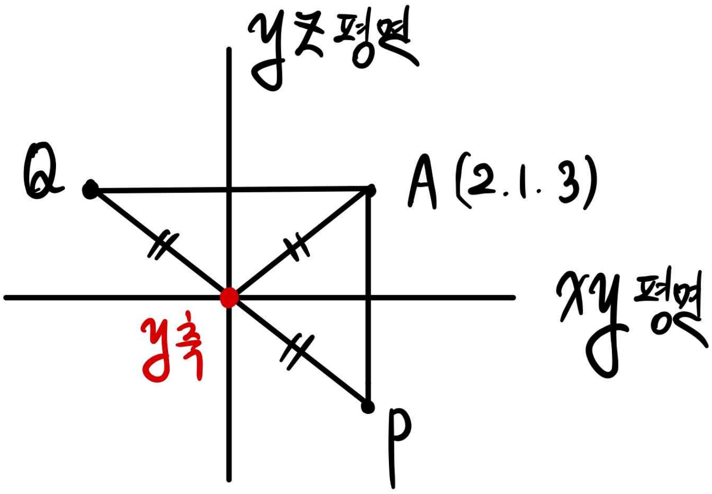
23. 좌표공간의 점 A$(2, 1, 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? [2점]

① $5\sqrt{2}$　② $2\sqrt{13}$　③ $3\sqrt{6}$　④ $2\sqrt{14}$　⑤ $2\sqrt{15}$

1. 그냥 두 점 P, Q의 좌표를 각각 구해서 계산하는 게 가장 빠르겠습니다. $\mathrm{P}(2,1,-3)$, $\mathrm{Q}(-2,1,3)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$입니다. ②번이 정답입니다.

2. 정답은 점 A와 y축 사이의 거리의 2배입니다.
A에서 y축에 내린 수선의 발 H의 좌표가 $\mathrm{H}(0,1,0)$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{13}$입니다.

xy평면과 yz평면의 교선은 y축입니다.
왜 정답이 점 A와 y축 사이의 거리의 2배인지는 다음과 같이 y축이 점으로 보이도록 단면화한 그림을 통해 알 수 있습니다.



24. 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2}, 0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6} = 1$의 주축의 길이는?
(단, a는 양수이다.) [3점]

① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

1. $a^2 + 6 = 18$이고 a가 양수이므로 $a = 2\sqrt{3}$입니다. 그러므로 쌍곡선의 주축의 길이는 $4\sqrt{3}$입니다. 정답은 ③입니다.

25. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x+1}{2}=y-3, \quad x-2=\frac{y-5}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

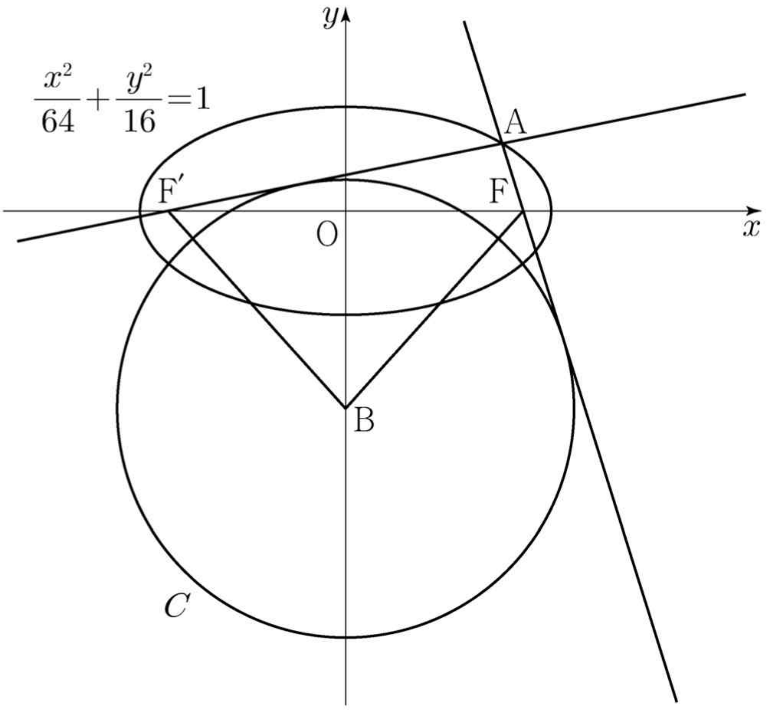
1. 직선 $\frac{x+1}{2}=y-3$의 방향벡터는 $\overrightarrow{d_1}=(2, 1)$이고,

직선 $x-2=\frac{y-5}{3}$의 방향벡터는 $\overrightarrow{d_2}=(1, 3)$이므로 두 직선이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

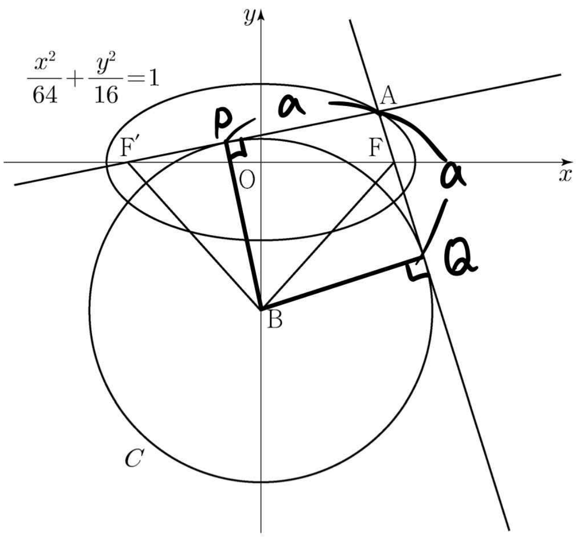
$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2}\right|}{\left|\overrightarrow{d_1}\right|\left|\overrightarrow{d_2}\right|}=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$입니다. 정답은 ⑤입니다.

26. 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A가 있다. 두 직선 AF, AF′에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 중 중심의 y좌표가 음수인 것을 C라 하자. 원 C의 중심을 B라 할 때 사각형 AFBF′의 넓이가 72이다. 원 C의 반지름의 길이는? [3점]

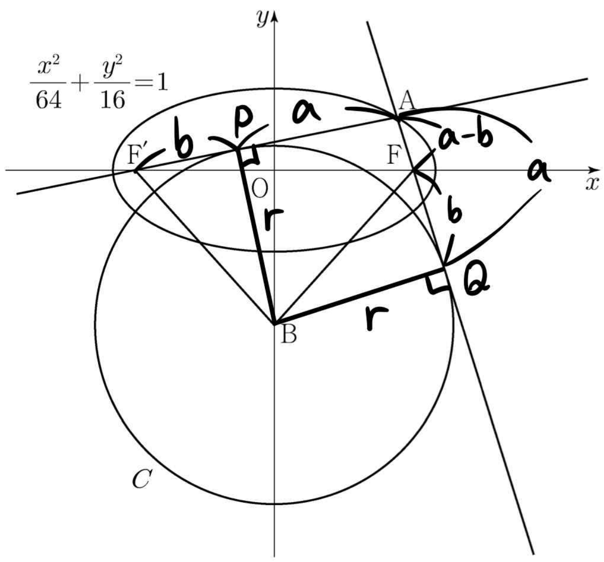
① $\frac{17}{2}$　　② 9　　③ $\frac{19}{2}$　　④ 10　　⑤ $\frac{21}{2}$



1. 타원의 장축의 길이는 16입니다. 점 A에서 원 C에 그은 두 접선의 두 접점을 각각 P, Q라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$ 입니다. $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=a$라 하겠습니다.



원 C의 반지름의 길이를 r라 하겠습니다. 점 B가 y축 위의 점이고, 두 점 F, F'이 y축에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}$입니다. 또, 두 점 P, Q가 원 C 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BQ}}=r$입니다. 그렇다면 두 직각삼각형 $\mathrm{BPF'}$, BQF가 합동이라는 것을 알 수 있습니다. 그러므로 $\overline{\mathrm{F'P}}=\overline{\mathrm{FQ}}$ 입니다. $\overline{\mathrm{F'P}}=\overline{\mathrm{FQ}}=b$라 하겠습니다.

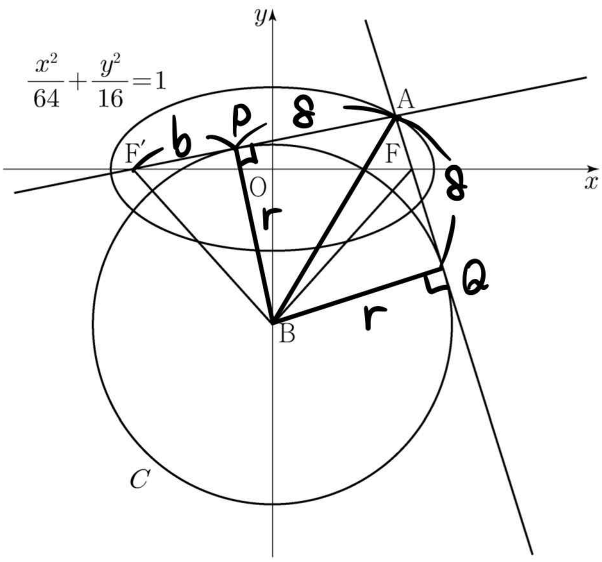


점 A가 장축의 길이가 16인 타원 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=16$입니다. 그러므로 $a=8$입니다.

2. 사각형 $\mathrm{AFBF'}$의 넓이를 통해 원 C의 반지름의 길이를 구해야 합니다. 사각형 $\mathrm{AFBF'}$의 넓이를 구하는 방법이 2개 있겠습니다.

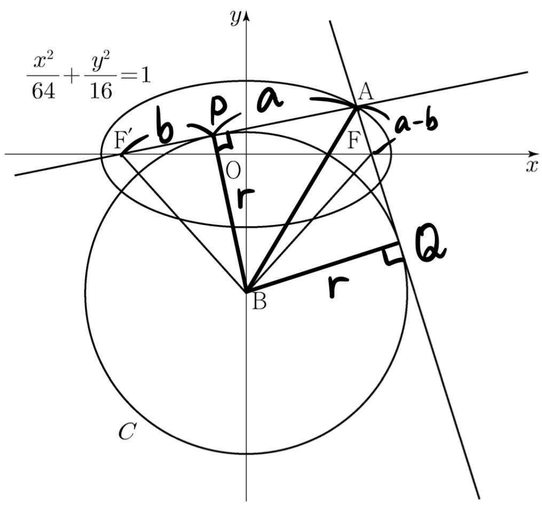
① 사각형 $\mathrm{AFBF'}$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{BPF'}$의 넓이와 사각형 AFBP의 넓이의 합으로 볼 수 있습니다. 위에서 두 직각삼각형 $\mathrm{BPF'}$, BQF가 합동임을 알아냈습니다.

그러므로 사각형 $\mathrm{AFBF'}$의 넓이는 삼각형 BQF의 넓이와 사각형 AFBP의 넓이의 합입니다. 이는 곧 사각형 AQBP의 넓이와 같습니다.



두 직각삼각형 ABP, ABQ가 서로 합동입니다. 그러므로 사각형 AQBP의 넓이는 삼각형 ABP의 넓이 $4r$의 두 배입니다. $8r = 72$이므로 $r = 9$입니다. 정답은 ②입니다.

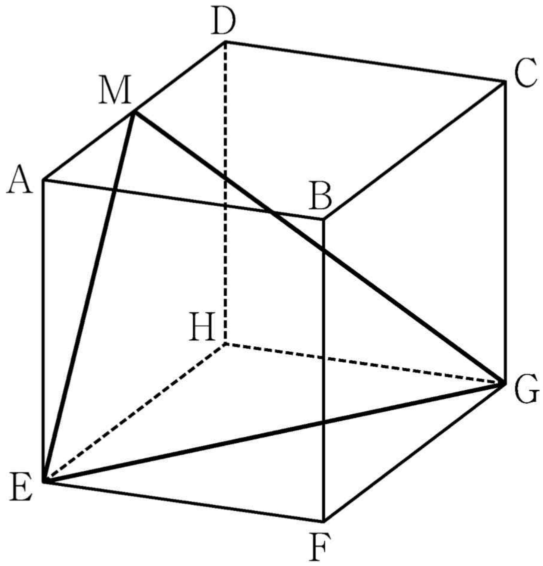
② 사각형 $\mathrm{AFBF'}$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{ABF'}$의 넓이와 삼각형 AFB의 넓이의 합과 같습니다.



삼각형 $\mathrm{ABF'}$의 밑변을 $\overline{\mathrm{AF'}}$로 두고, 삼각형 AFB의 밑변을 $\overline{\mathrm{AF}}$로 두면, 두 삼각형의 높이는 r로 같습니다. 그러므로 두 삼각형의 넓이의 합은 $\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}})\times r = 8r = 72$입니다. 그러므로 $r = 9$입니다. 정답은 ②입니다.

27. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 $\mathrm{ABCD-EFGH}$가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MEG의 넓이는? [3점]

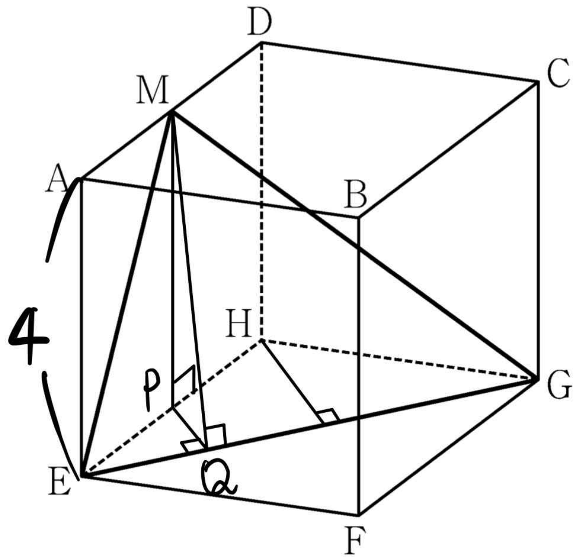
① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$



1. 삼각형 MEG의 넓이를 구해야 합니다. 삼각형 MEG의 밑변을 $\overline{\mathrm{EG}}$로 보겠습니다. 선분 EG는 한 모서리의 길이가 4인 정사각형의 대각선이므로 $\overline{\mathrm{EG}}=4\sqrt{2}$ 입니다.

점 M과 직선 EG 사이의 거리를 구해야 합니다. 삼수선의 정리를 고려하면 되겠습니다.
점 M에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 P라 할 때, 점 P는 선분 EH의 중점입니다.
점 P에서 직선 EG에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 직선 MQ와 직선 EG는 서로 수직입니다.

그러므로 점 M과 직선 EG 사이의 거리는 선분 MQ의 길이와 같습니다. 그림을 그려봅시다.



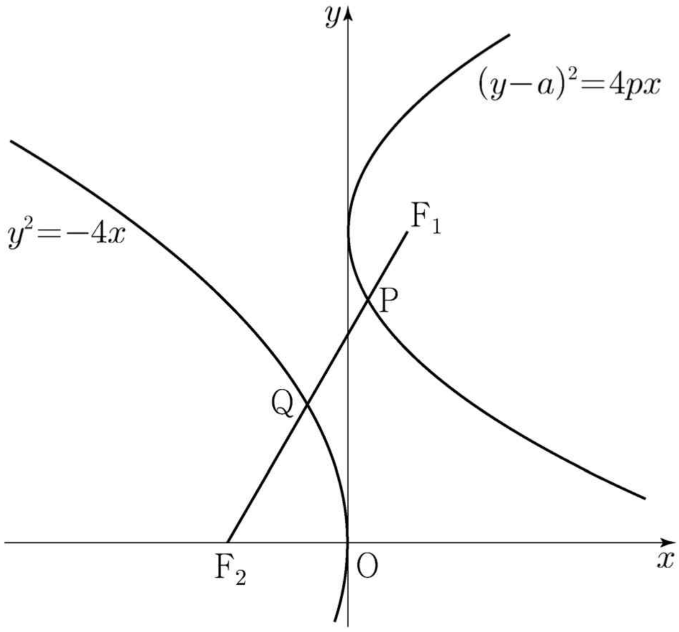
H에서 직선 EG에 내린 수선의 발을 R라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{HR}}:\overline{\mathrm{HF}}=1:2:4$입니다. $\overline{\mathrm{HF}}=4\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$ 입니다.

$\overline{\mathrm{MP}}=4$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{MQ}}=3\sqrt{2}$ 입니다.

그러므로 삼각형 MEG의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EG}}\times\overline{\mathrm{MQ}}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=12$입니다.
정답은 ④입니다.

28. 두 양수 a, p에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 F_1이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 F_2라 하자. 선분 $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}=3$, $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이다. a^2+p^2의 값은? [4점]

① 6　　② $\frac{25}{4}$　　③ $\frac{13}{2}$　　④ $\frac{27}{4}$　　⑤ 7



1. $\mathrm{F_1}(p, a)$, $\mathrm{F_2}(-1, 0)$입니다. $\overline{\mathrm{F_1F_2}} = 3$이므로 $(p+1)^2 + a^2 = 9$입니다.

   구하고자 하는 값은 $a^2 + p^2$인데, $(p+1)^2 + a^2 = 9$이므로 이 값은 $8 - 2p$와 같습니다. p의 값만 구하면 되겠습니다.

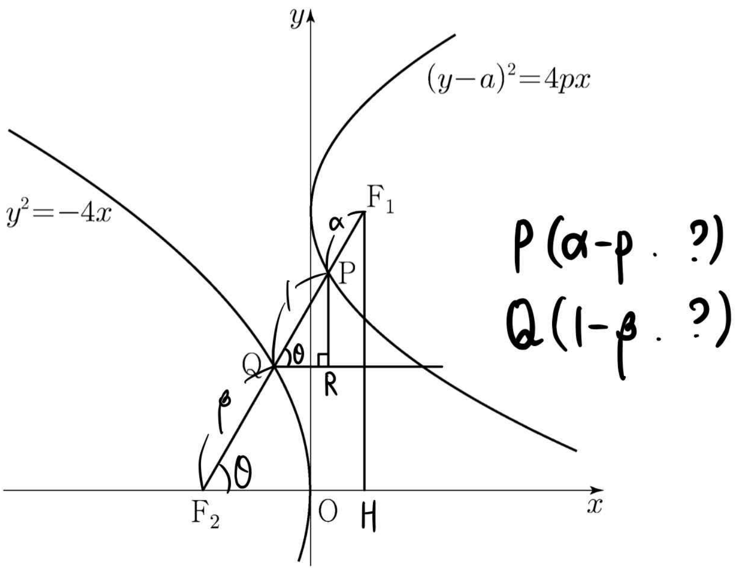
   포물선 $(y-a)^2 = 4px$의 준선은 $x = -p$입니다. $\overline{\mathrm{F_1P}} = \alpha$라 하면, 점 P와 직선 $x = -p$ 사이의 거리도 α이므로 점 P의 x좌표는 $\alpha - p$입니다.

   포물선 $y^2 = -4x$의 준선은 $x = 1$입니다. $\overline{\mathrm{F_2Q}} = \beta$라 하면, 점 Q와 직선 $x = 1$ 사이의 거리도 β이므로 점 Q의 x좌표는 $1 - \beta$입니다.

   $\overline{\mathrm{F_1F_2}} = 3$, $\overline{\mathrm{PQ}} = 1$이므로 $\overline{\mathrm{F_1P}} + \overline{\mathrm{F_2Q}} = \alpha + \beta = 2$입니다.

2. 점 $\mathrm{F_1}$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 합시다.

   점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선을 l이라 하고, 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 R라 합시다.



   두 직각삼각형 PQR, $\mathrm{F_1F_2H}$가 서로 닮음입니다. 길이 비는 $1:3$입니다. 그러므로 $\overline{\mathrm{QR}} : \overline{\mathrm{F_2H}} = 1:3$입니다.

   선분 QR의 길이는 두 점 P, Q의 x좌표의 차와 같습니다. 그 값은 $\alpha + \beta - p - 1$이고, $\alpha + \beta = 2$이므로 $\overline{\mathrm{QR}} = 1 - p$입니다.

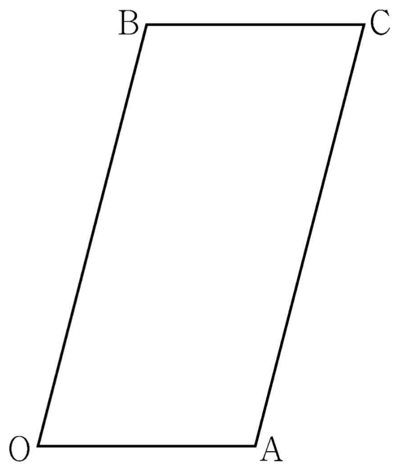
   선분 $\mathrm{F_2H}$의 길이는 두 점 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$의 x좌표의 차와 같습니다. $\overline{\mathrm{F_2H}} = 1 + p$입니다.

   $1 - p : 1 + p = 1:3$에서 $p = \dfrac{1}{2}$를 얻을 수 있습니다. 그러므로 $8 - 2p = 7$이고, 정답은 ⑤입니다.

29. 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$이고 $\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0\le s\le 1, 0\le t\le 1)$ (나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



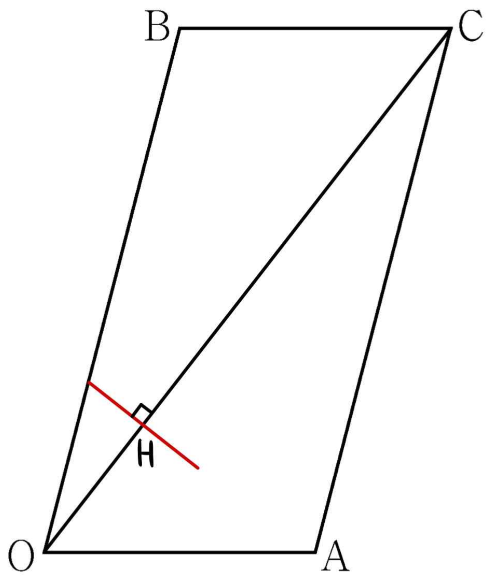
1. 박스 위에서는 평행사변형이 구체적으로 어떻게 생겼는지에 대한 조건을 주고 있습니다.
(가)에 따르면 점 P는 평행사변형의 테두리 혹은 내부의 점입니다.

(나)에서 모든 벡터의 시점을 O로 바꾸어 표현해봅시다. 여기서 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$로 바로 갈 수 있습니다. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=2$
이로부터 $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$를 얻을 수 있습니다.
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{4}=1$이므로 $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=3$입니다.

선분 OC의 길이를 구하면, 점 P에서 직선 OC에 내린 수선의 발이 어디에 있는지 알 수 있습니다. 그 점을 H라 하면, 점 P의 자취는 점 H를 지나고 직선 OC와 수직인 직선 위의 점입니다.

선분 OC의 길이를 구해봅시다. $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$이므로
$|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=12$에서 $\overline{OC}=2\sqrt{3}$입니다.
점 P에서 직선 OC에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OH}||\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}|\overrightarrow{OH}|=3$입니다. $|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 점 H는 선분 OC를 $1:3$으로 내분하는 점입니다.

점 P의 자취의 일부를 그려보겠습니다.

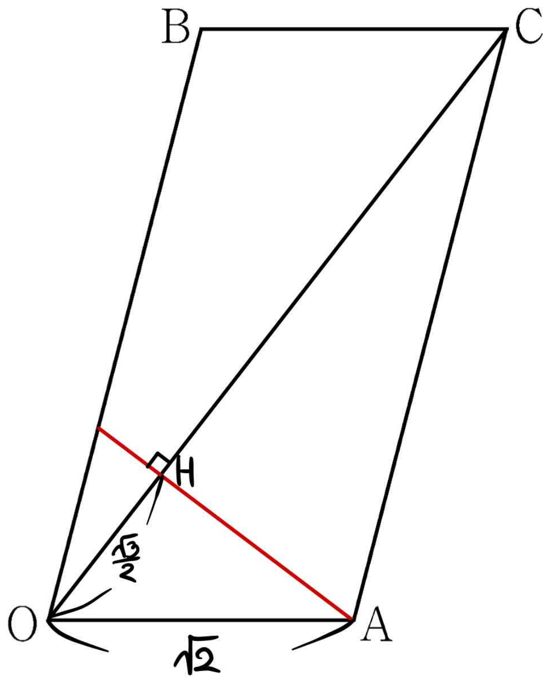


저 빨간색 선의 오른쪽 아래를 연장하면 평행사변형의 테두리와 어디서 만나는지 확인해야 합니다.
빨간색 선을 연장했을 때 평행사변형의 테두리와 만나는 점을 Q라 합시다.
다음과 같이 세 가지 경우가 있겠습니다.
① Q가 선분 OA 위의 점이다.
② Q는 A이다.
③ Q가 선분 AC 위의 점이다.

셋 중에 뭔지 확인하려면 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$의 값과 3의 대소 관계를 확인해야 하겠습니다.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}>3$이면 ①이고, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=3$이면 ②이고, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}<3$이면 ③입니다.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=|\overrightarrow{OA}|^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$이므로 점 Q는 점 A입니다.



$|\overrightarrow{OP}|$의 최댓값은 $\sqrt{2}$, 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$입니다.

$|\overrightarrow{OP}|$가 최대이고 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OX}$가 반대 방향일 때 $|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|$의 값이 최대입니다. $M=4\sqrt{2}$입니다.

$|\overrightarrow{OP}|$가 최소이고 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OX}$의 방향이 같을 때 $|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|$의 값이 최소입니다.

$m=\left|\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\right|=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$입니다.

그러므로 $Mm=6\sqrt{6}-8$이므로 $a^2+b^2=100$입니다. 정답은 100입니다.

다른 풀이

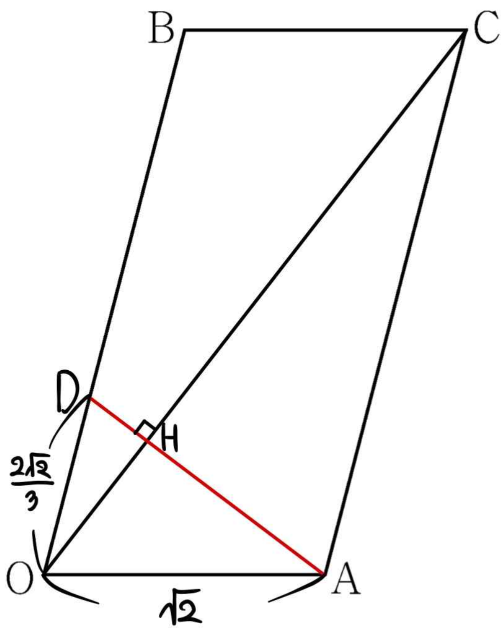
2. (나)에서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$을 얻는 것까지는 똑같습니다.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OA}|^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$입니다.

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OB}|^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 9$입니다.

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 9$이므로 $\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$입니다. $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$라 하면 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$입니다.

그러므로 점 P의 자취는 선분 AD입니다.



아까처럼 OC의 길이를 구한 다음에 OH의 길이($|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값)를 구할 수 있겠습니다.

아니면 코사인법칙을 이용해서 $\overline{\mathrm{AD}}$를 구하고, 삼각형 OAD의 넓이를 두 번 표현함으로써 OH의 길이를 구할 수도 있습니다.

$\angle \mathrm{OAB} = \angle \mathrm{OAD} = \theta$라 하겠습니다.

$\overline{\mathrm{AD}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OD}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OD}} \times \cos\theta = \frac{20}{9}$이므로 $\overline{\mathrm{AD}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$입니다.

삼각형 OAD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OD}} \times \sin\theta$로 구하거나, $\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{OH}}$로 구할 수 있습니다.

$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{3} \times \overline{\mathrm{OH}}$에서 $\overline{\mathrm{OH}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$입니다. 이후의 풀이는 위와 같습니다.

다른 풀이

3. (가)에서 s, t를 그대로 끌고가는 게 그렇게 나쁘진 않은 것 같습니다.

(나)의 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}) - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3$을 얻습니다.

등식의 좌변은 $\left(s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\right)+\left(s+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\right)$입니다. 이 값이 $3s+9t$입니다.

$3s+9t=3$이므로 $s+3t=1$을 얻습니다.

그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3t \times \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$로 표현할 수 있고, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라 하면 점 P의 자취는 선분 AD입니다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최솟값을 구하는 또 다른 방법이 있는데 계산이 약간 많습니다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}}$로 둘 수 있습니다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = s^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + (1-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 + 2s(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}$입니다. 여기서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 1$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}$입니다.

그러므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 2s^2 + \frac{8}{9}(1-s)^2 + \frac{2s(1-s)}{3}$입니다. 이 식은 s에 대한 이차함수이며, 최고차항의 계수가 양수입니다. 이 식을 s에 대하여 미분했을 때, 그 값이 0이 되도록 하는 s의 값을 찾으면 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최솟값을 구할 수 있겠습니다.[1)]

미분을 해봅시다.

$4s + \frac{16}{9}(s-1) + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}s = 0$을 정리하면 $s = \frac{1}{4}$를 얻을 수 있습니다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 2s^2 + \frac{8}{9}(1-s)^2 + \frac{2s(1-s)}{3}$에서 $s = \frac{1}{4}$를 대입하면 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$입니다. 이후 풀이는 위와 같겠습니다.

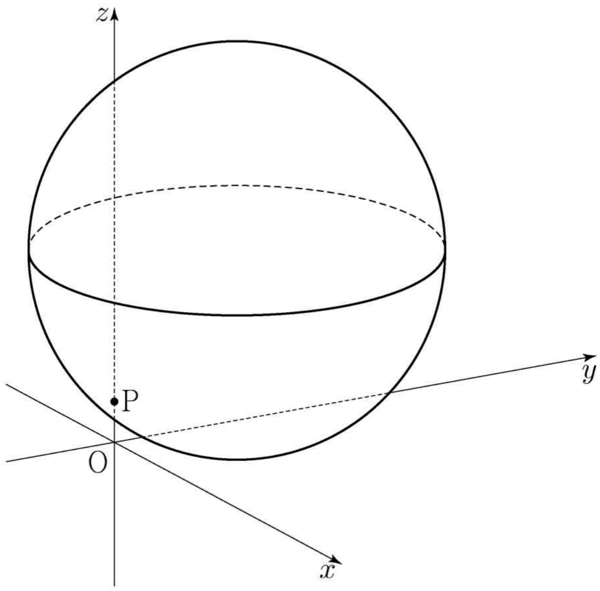
---

1) 만약 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 2s^2 + \frac{8}{9}(1-s)^2 + \frac{2s(1-s)}{3}$의 도함수가 0이 되도록 하는 s가 0보다 작거나 1보다 크다면 이를 이용할 수 없습니다. 그러므로 이때의 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최솟값은 $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$입니다.

30. 좌표공간에서 중심이 $\mathrm{C}(2, \sqrt{5}, 5)$이고 점 $\mathrm{P}(0, 0, 1)$을 지나는 구

$$S : (x-2)^2 + (y-\sqrt{5})^2 + (z-5)^2 = 25$$

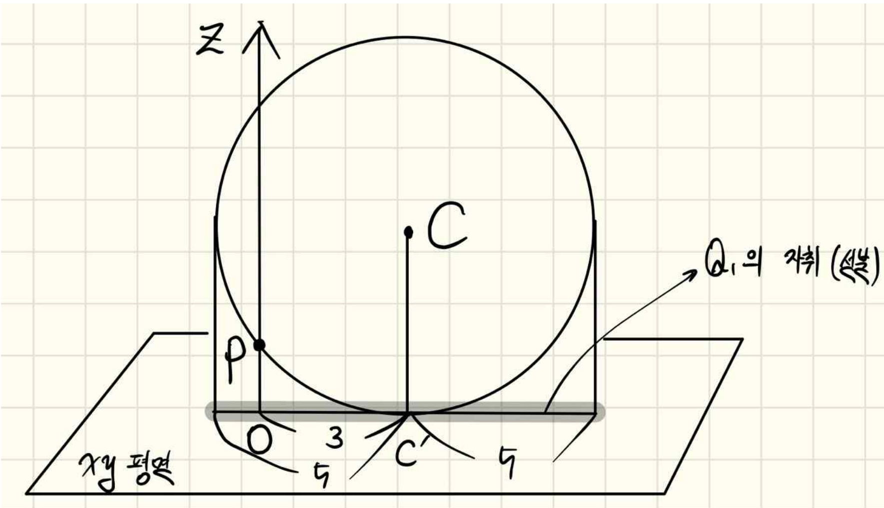
가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자.
삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



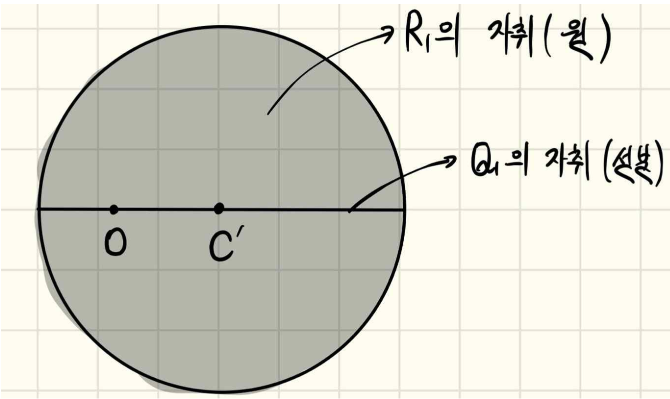
1. 구의 반지름의 길이가 5이고, 구의 중심 C의 z좌표가 5이므로 구 S가 xy평면과 접한다. 문제에서 요구하는 것은 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이의 최댓값과, 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대일 때 두 평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$, PQR가 이루는 각의 크기이다. 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이의 최댓값부터 찾아야 하겠다.

   점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 $\mathrm{C'}(2, \sqrt{5}, 0)$이라 하자. $\overline{\mathrm{OC'}} = 3$이다. 두 점 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$이 각각 존재할 수 있는 영역은 어떻게 될까? $\mathrm{R_1}$의 영역은 쉽다. R이 구 S 위를 마음대로 움직이므로 $\mathrm{R_1}$은 점 $\mathrm{C'}$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 xy평면 위의 원이다.

   평면 OPC는 xy평면과 수직이다. 평면 OPC가 z축을 포함하고, z축은 xy평면과 수직이기 때문이다. 그렇다면 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q의 xy평면 위로의 정사영 $\mathrm{Q_1}$의 자취는 다음과 같다.



   $\mathrm{Q_1}$은 직선 $\mathrm{OC'}$ 위의 점이고, $\overline{\mathrm{C'Q_1}} \le 5$이다. 이제 xy평면 위의 네 점 O, $\mathrm{C'}$, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$을 보자.

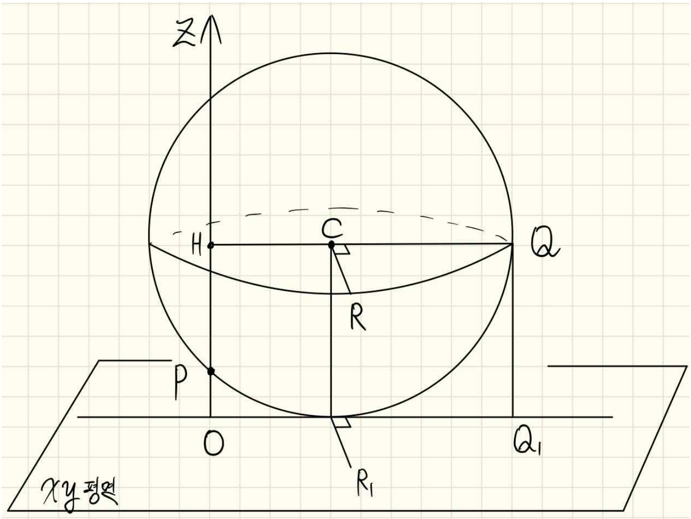


   여기서 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되려면 점 $\mathrm{Q_1}$은 O로부터 가장 멀리 떨어져 있어야 하겠고, 점 $\mathrm{C'R_1}$이 직선 $\mathrm{OQ_1}$이 수직이어야 하고, $\overline{\mathrm{C'R_1}} = 5$이어야 하겠다.

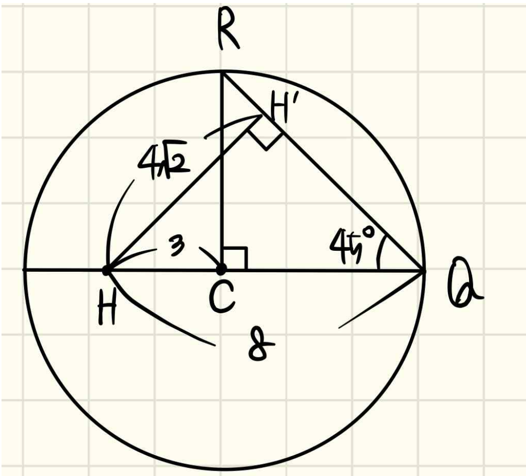
   삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OQ_1}} \times \overline{\mathrm{C'R_1}} = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 20$이다.

2. 평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$과 평면 PQR가 이루는 각의 크기 θ를 찾자. 구하고자 하는 값은 $20\cos\theta$이다.

평면 OQ_1R_1은 xy평면이다. xy평면과 평면 PQR가 이루는 각의 크기를 찾아야 한다. P의 위치는 알고 있다. Q, R의 위치를 찾아야 하는데, $\overline{CQ}=\overline{CR}=\overline{C'Q_1}=\overline{C'R_1}=5$이다. 그러므로 $\overline{CQ}$, $\overline{C'Q_1}$은 서로 평행하고, $\overline{CR}$, $\overline{C'R_1}$은 서로 평행하다. 그림을 그려보자.



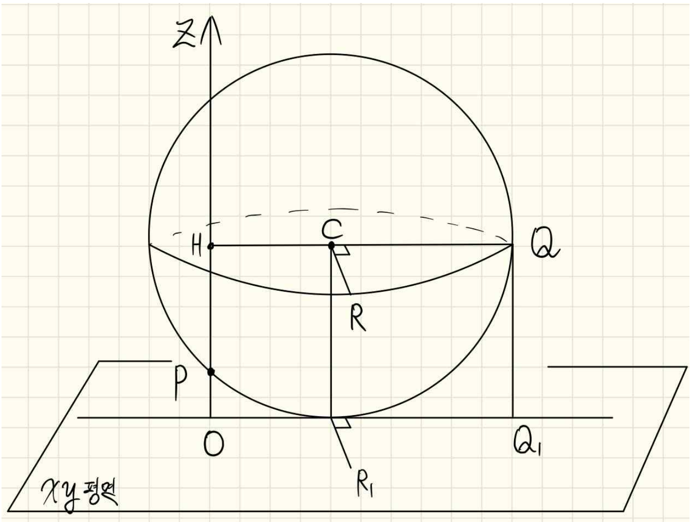
xy평면과 평면 PQR가 이루는 각의 크기를 찾아야 하는데, 평면 CQR가 xy평면과 평행하므로, 두 평면 CQR, PQR가 이루는 각의 크기를 찾으면 되겠다. 두 평면의 교선은 직선 QR이다. 점 P에서 평면 CQR에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H에서 직선 QR에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 구하고자 하는 각 θ는 $\angle PH'H$이다. $\overline{CP}=5$, $\overline{PH}=4$이므로 $\overline{CH}=3$이다.



직선 CQ와 직선 CR가 서로 수직이므로 $\angle CQR=45°$ 이므로 $\overline{HH'}=4\sqrt{2}$이다.

$\tan\theta=\dfrac{\overline{PH}}{\overline{HH'}}=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이고 $20\cos\theta=\dfrac{20}{3}\sqrt{6}$이다. 정답은 23이다.

※ 평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$과 평면 PQR가 이루는 각의 크기를 좌표를 이용해서 구해보자. 평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$은 xy평면이므로 xy평면과 평면 PQR가 이루는 각의 크기를 찾으면 된다. 평면 PQR의 방정식을 찾아야 하는데, C의 좌표 $(2, \sqrt{5}, 5)$가 마음에 들지 않는다. Q, R의 좌표를 찾는 게 불가능한 건 아니지만 어렵다. 어떻게 하면 좋을까?
문제에서 점들의 좌표가 주어졌지만 이게 맘에 들지 않는다면 좌표를 새로 설정해도 좋다. 여기서 주의해야 할 것은 좌표를 바꾸더라도 문제에서 주어진 점들의 위치 관계가 바뀌어서는 안 된다는 것이다. 평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$은 원래대로 xy평면으로 보기로 했으니, xy평면에 수직인 직선인 z축은 그대로 z축이어야 하겠고, 점들의 z좌표가 바뀌면 안 되겠다. x좌표와 y좌표를 계산하기 편하게 바꾸고 싶다.



이 그림에서 직선 $\mathrm{OQ_1}$을 x축으로 본다면 직선 $\mathrm{C'R_1}$은 y축과 평행하다.
$\overline{\mathrm{OC'}} = 3$, $\overline{\mathrm{OQ_1}} = 8$, $\overline{\mathrm{C'R_1}} = 5$이다. $\mathrm{C'}(3,0,0)$, $\mathrm{Q_1}(8,0,0)$, $\mathrm{R_1}(3,5,0)$으로 좌표를 바꾸었다.
두 점 Q, R과 xy평면 사이의 거리가 5이므로 $\mathrm{Q}(8,0,5)$, $\mathrm{R}(3,5,5)$이다.

이제 평면 PQR의 방정식을 찾으면 되겠다. 점 $\mathrm{P}(0,0,1)$을 포함하는 평면이므로 평면의 방정식을 $ax+by+cz=c$로 두고, Q, R의 좌표를 방정식에 대입해보자.
두 등식 $8a+4c=0$, $3a+5b+4c=0$을 얻는다. 두 등식에 대한 연립방정식을 풀면 $a=b$, $a:c=1:-2$를 얻는다. 그러므로 평면 PQR의 방정식은 $x+y-2z=-2$이고 법선벡터는 $(1,1,-2)$이다.
xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이므로 $\cos\theta = \dfrac{|(1,1,-2)\bullet(0,0,1)|}{|(1,1,-2)||(0,0,1)|} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$이다.