2021학년도 4월 고3 전국연합학력평가 문제지

수학 영역

제 2 교시

5지선다형

1. $\left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

$\left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}=\left\{\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}}=3$

2. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_5-a_2의 값은? [2점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

$a_5-a_2=3\times2=6$

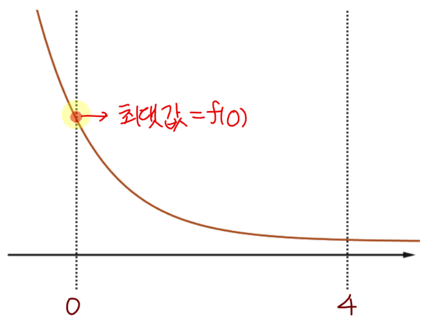
전 문항 풀컬러 해설과 4월 학평 오답노트용 문제 스티커는
『김지석 수학 월간지 제3회』 에서 만나보실 수 있습니다.

빠른 채점

1	②	2	①	3	⑤	4	④	5	③
6	④	7	⑤	8	①	9	②	10	③
11	③	12	④	13	②	14	⑤	15	③
16	2	17	40	18	8	19	16	20	7
21	5	22	251						

3. 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+1$의 최댓값은? [3점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10



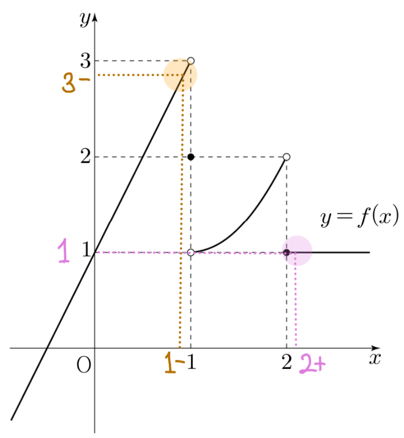
$0<\frac{1}{3}<1$이므로 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+1$은

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

$\therefore$ 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+1=10$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=3+1=4$

수학 영역

22. 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=3x+a,\ g(x)=\int_{2}^{x}(t+a)f(t)dt$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다. (나) 곡선 $y=\|h(x)\|$가 x축에 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

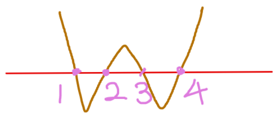
김지석의 필연성

(step1) 조건 (가) 해석하기

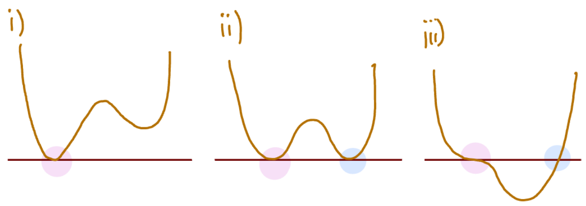
곡선 $y=h(x)$는 x축에 접한다.

(step2) 조건 (나) 해석하기

곡선 $y=|h(x)|$는 W형태이다.



따라서 곡선 $y=h(x)$의 그래프로 가능한 건 아래 3가지 개형이다.



$h(x)=0$는 중근을 갖고.

서로 다른 근의 개수는 2개 이하이다.

i) 2중근과 2허근

ii) 2중근과 다른 2중근

iii) 3중근과 다른 1근

(step3) $h(x)=f(x)g(x)=0$

방정식 $f(x)=0$은 $x=-\frac{a}{3}$을 근으로 갖는다.

방정식 $g(x)=0$은 $x=2$을 근으로 갖는다.

이때 $g(x)=0$은 $x=2$ 이외에도

다른 근이 더 있을 수도 있고 없을 수도 있다!

다만 서로 다른 근의 개수는 2개 이하이다.

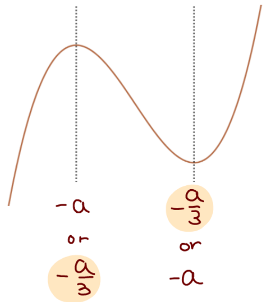
(step4) 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형

$y=g(x)$의 그래프의 개형을 관찰하며

문제 조건에 맞는 $g(x)$를 찾아보자.

$g(x)=\int_{2}^{x}(t+a)f(t)dt=\int_{2}^{x}(t+a)(3t+a)dt$

$g'(x)=(x+a)(3x+a)$



※ $g(x)=0$이 하나의 실근 $x=2$을 갖는 경우

$h(x)=f(x)g(x)=0$이 중근을 갖지 않아서 모순 $(\because -\frac{a}{3}\neq 2)$

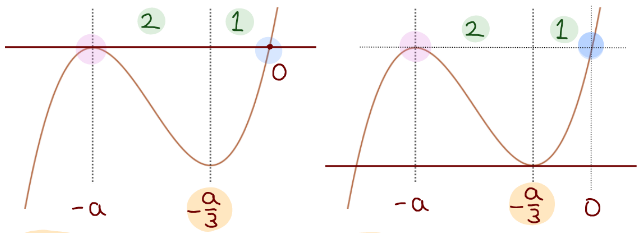
※ $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우

$h(x)=f(x)g(x)=0$이 서로 다른 근이 3개 이상이 되어 모순

$\therefore$ $g(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고,

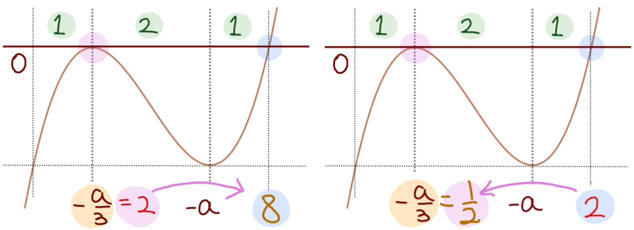
$x=-\frac{a}{3}$과 $x=2$는 그 두 근에 포함되어 있다.

i) $a>0 \Leftrightarrow -a<0$ 3차함수비율



$x=-\frac{a}{3}$가 근에 포함되지 않아 모순 $x=2$가 근에 포함되지 않아 모순

ii) $a<0 \Leftrightarrow -a>0$



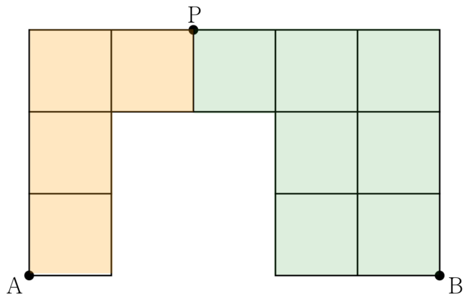
$h(x)=3(x-2)^2(x-8)$ $h(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3(x-2)$

$\therefore$ $h(-1)=729$ $\therefore$ $h(-1)=\frac{243}{8}$

$\therefore$ 최솟값 $h(-1)=\frac{243}{8}$, $p+q=8+243=251$

수학 영역(확률과 통계)

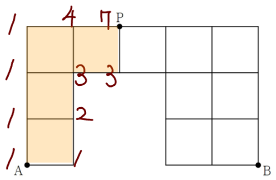
28. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 수는? [4점]



① 78 ② 82 ③ 86 ④ 90 ⑤ 94

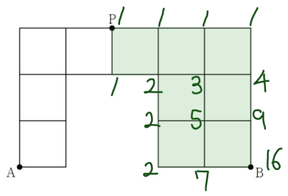
김지석의 필연성 합의 법칙

i) A→P



7가지

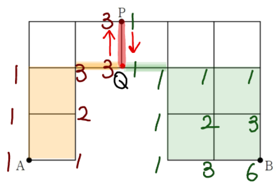
ii) P→B



16가지

제외해야하는 경우

iii) A→Q→P→Q→B

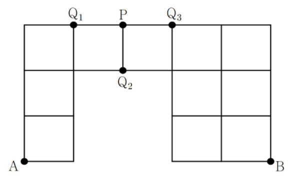


3×6가지

$\therefore$ $7\times16-3\times6$

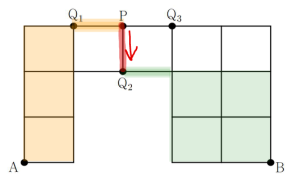
$=112-18=94$

[다른 풀이]



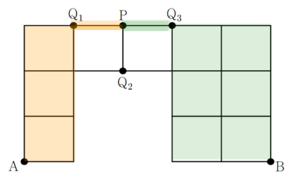
그림과 같이 세 지점 Q_1, Q_2, Q_3을 정하면
A지점에서 출발하여 P지점까지 가기 위해서는
Q_1지점 또는 Q_2지점 중 한 지점을 지나야 하고
P지점에서 출발하여 B지점까지 가기 위해서는
Q_2지점 또는 Q_3지점 중 한 지점을 지나야 한다.

(i) $\mathrm{A}\to\mathrm{Q}_1\to\mathrm{P}\to\mathrm{Q}_2\to\mathrm{B}$의 순서로 이동하는 경우



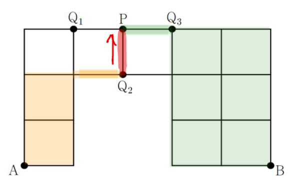
$$\frac{4!}{1!\times3!}\times1\times1\times1\times\frac{4!}{2!\times2!}=24$$

(ii) $\mathrm{A}\to\mathrm{Q}_1\to\mathrm{P}\to\mathrm{Q}_3\to\mathrm{B}$의 순서로 이동하는 경우



$$\frac{4!}{1!\times3!}\times1\times1\times\frac{5!}{2!\times3!}=40$$

(iii) $\mathrm{A}\to\mathrm{Q}_2\to\mathrm{P}\to\mathrm{Q}_3\to\mathrm{B}$의 순서로 이동하는 경우

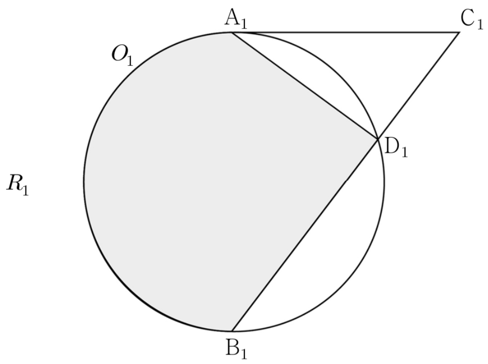


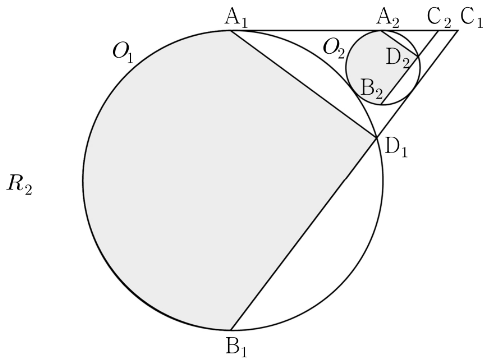
$$\frac{3!}{1!\times2!}\times1\times1\times1\times\frac{5!}{2!\times3!}=30$$

$\therefore$ $24+40+30=94$

수학 영역(미적분)

28. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 원 O_1의 외부에 $\angle B_1A_1C_1 = \frac{\pi}{2}$, $\overline{A_1B_1} : \overline{A_1C_1} = 4:3$이 되도록 점 C_1을 잡고 두 선분 A_1C_1, B_1C_1을 그린다. 원 O_1과 선분 B_1C_1의 교점 중 B_1이 아닌 점을 D_1이라 하고, 점 D_1을 포함하지 않는 호 A_1B_1과 두 선분 A_1D_1, B_1D_1로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 호 A_1D_1과 두 선분 A_1C_1, C_1D_1에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 선분 A_1C_1과 원 O_2의 교점을 A_2, 점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1과 평행한 직선이 원 O_2와 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 C_2, D_2를 잡고, 점 D_2를 포함하지 않는 호 A_2B_2와 두 선분 A_2D_2, B_2D_2로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

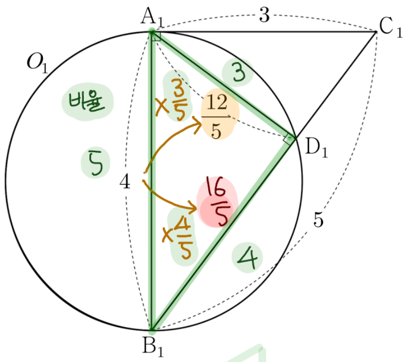




⋮　　　　⋮

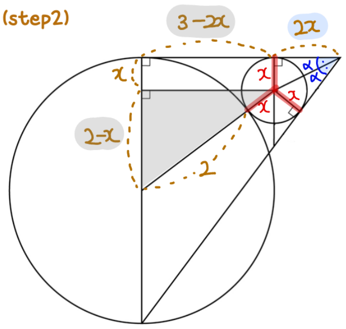
① $\frac{32}{15}\pi + \frac{256}{125}$　② $\frac{9}{4}\pi + \frac{54}{25}$　③ $\frac{32}{15}\pi + \frac{512}{125}$
④ $\frac{9}{4}\pi + \frac{108}{25}$　⑤ $\frac{8}{3}\pi + \frac{128}{25}$

(step1) 직각 삼각형의 닮음



$\therefore\ S_1 = 2\pi + \frac{1}{2} \times \frac{12}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{96}{25} = 2\pi + \frac{96}{25}$

(step2)



$\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow\ \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow\ \tan\alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore$ O_2의 반지름의 길이를 x라 하면 $\overline{C_1A_2} = 2x$

$(x+2)^2 = (3-2x)^2 + (2-x)^2$

$\therefore\ x = \frac{1}{2}$

원 O_n과 원 O_{n+1}의

닮음비 = $2 : \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4:1$

넓이의 비 = $16:1$

공비는 $\frac{1}{16}$

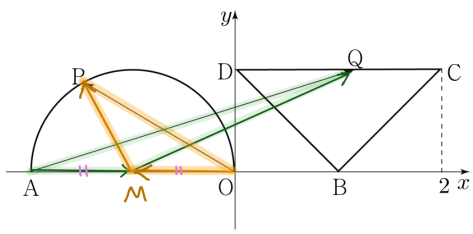
등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2\pi + \frac{96}{25}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{32}{15}\pi + \frac{512}{125}$

수학 영역(기하)

단답형

29. 좌표평면 위에 네 점 A$(-2, 0)$, B$(1, 0)$, C$(2, 1)$, D$(0, 1)$이 있다. 반원의 호 $(x+1)^2+y^2=1\,(0\le y\le 1)$ 위를 움직이는 점 P와 삼각형 BCD 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M^2+m^2=p+2\sqrt{q}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]



김지석의 필연성

(step1) 원이 나오면 반드시 중심과 특별 점을 잇는다.

두 점 A, O의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\cancel{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}})+(\cancel{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ $(\because\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{0})$

(step2) 최댓값 구하기

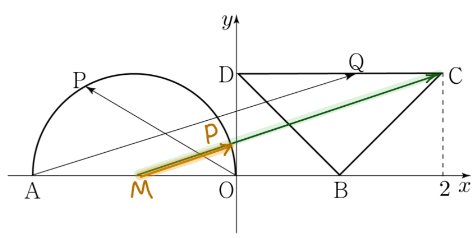
벡터 $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$는 크기가 항상 1이고

방향은 $180°$ 내에서 모든 방향이 가능하다.

$|\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$의 최대를 구하려면

$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$의 값이 최대일 때의 $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$를 찾고

그때의 $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$의 방향이 같도록 선택하면 된다.



점 Q가 점 C일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$가 최대이므로

$\overline{\mathrm{MC}}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로

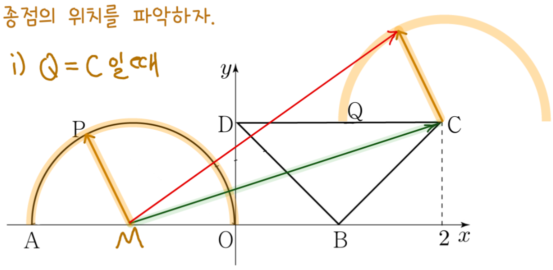
$|\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|\le|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|+1=\sqrt{10}+1$

$\therefore\ M=\sqrt{10}+1$

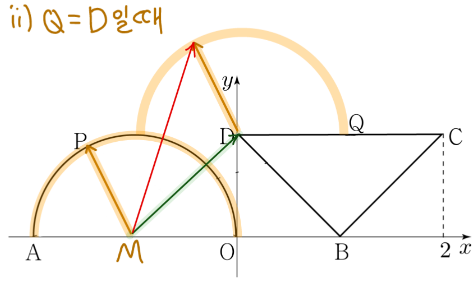
(step3) 최솟값 구하기

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 시점을 M으로 평행이동시켰을 때의 종점의 위치를 파악하자.

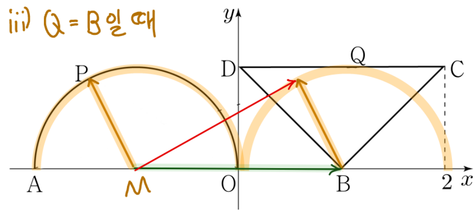
i) Q = C일 때



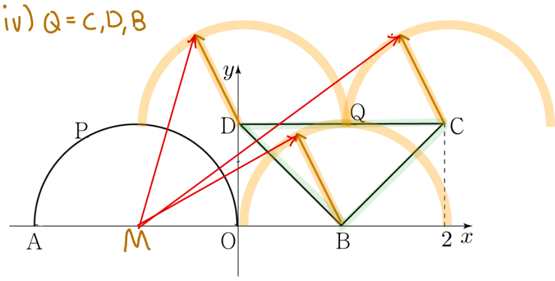
ii) Q = D일 때



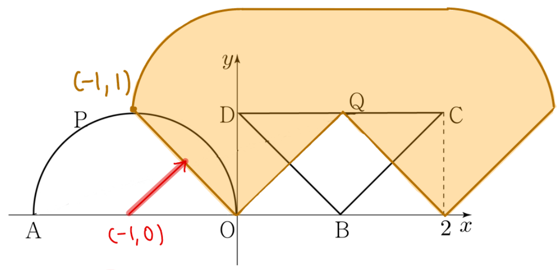
iii) Q = B일 때



iv) Q = C, D, B



v) 모든 경우



$\therefore\ m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ M^2+m^2=(11+2\sqrt{10})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{23}{2}+2\sqrt{10}$

$\therefore\ p=\dfrac{23}{2},\ q=10,\ p\times q=115$