# 기·출·의 파·급·효·과

확률과 통계

# 확률과 통계

## 기출의 파급효과

orbibooks.com

# 확률과 통계의 도구와 태도

# 저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 2년째네요. 재작년에 EBS 선별과 칼럼으로, 작년에는 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

**1. 확률과 통계 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.**

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 단시간에 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예시 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러 이상의 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter들을 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습 효과를 기대할 수 있습니다.

**2. 기출에 대한 태도와 도구들을 바로 활용할 수 있도록 준킬러 이상급의 기출들을 칼럼 속 예시로 들었습니다. 20학년도 수능 경향과 해당 기출까지 반영되어 있습니다.**

확률과 통계 기출 중 주로 오답률이 높았던 평가원 문제들을 예시로 들었습니다. 칼럼 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

**3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.**

최근 교육청 사관 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 19학년도 수능 29번의 경우 14학년도 사관학교 15번과 매우 유사하고 20학년도 6월 평가원 21번, 30번은 18년 10월 교육청 21번, 30번과 매우 유사합니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 현재 수능을 대비하기는 힘듭니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 그리고 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 칼럼과 함께 있는 예시들은 확률과 통계 교재의 경우 대략 70문제 정도입니다. 예시에 있는 문제 수만으로 부족함을 느끼실 분들을 위해 예시보다는 다소 쉬운 유제들도 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 위해 충분히 넣었습니다. 확률과 통계 교재의 경우 대략 130문제입니다. 칼럼 속 예시뿐만 아니라 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 기출에 대한 태도와 도구들 기준으로 분리되었습니다.

**4. 칼럼 속 예시 해설과 유제 해설은 문제를 푸는 데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.**

예시 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 가독성이 좋아 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다. 유제는 칼럼과 예시들을 잘 학습했다면 무리없이 풀 수 있는 수준입니다.

하루에 예시를 포함한 칼럼 하나만 완료하고 유제 10문제만 푸세요! 이를 실천하면 확률과 통계 교재를 모두 끝내는 데에 2주가 걸립니다. 이 교재를 최소 2번 이상 볼 수 있습니다.

수학 가형 3등급 초반이 1등급 컷 이상 받는 데 1달에서 2달 사이로 걸립니다.
약 파는 것 아닙니다. 과장된 광고를 극히 싫어하는 편입니다.

저도 18학년도 6월 평가원 때 3등급 받고 여름방학 때 이 책의 내용대로 기출을 학습하고 18학년도 9월 평가원, 18학년도 수능 1등급을 가볍게 받아냈습니다.

제 과외 학생은 19학년도 6월 평가원 때 4등급에 가까운 3등급이었으나 이 방법대로 1달간 기출을 학습하고 19학년도 수능 96점을 받아내었습니다.

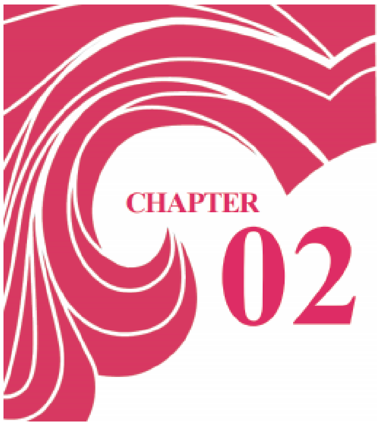
수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 수능 때까지 계속 끌고 가야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

| 기출의 파급효과 | 기대 N제 | 기대 모의고사 |
|---|---|---|
| 기출에 대한 일관적인 도구와 태도를 지향하는 교재입니다. 도구와 태도 체화를 위해 준킬러 이상의 기출을 주로 다루며, 고득점에 필요한 도구와 태도의 빠른 체화를 돕는 교재입니다. | 파급효과와 기출 다회독을 통해 다진 도구와 태도를 신유형, 고난도 문제에 적용해보는 교재입니다.<br><br>킬러문제 뿐만 아니라 시험마다 체감되는 '나한테만 낯선 문제'들까지 대비하는 교재입니다. | 기대 N제가 교훈성에 중점을 둔 교재라면 기대 모의고사는 철저하게 최근 수능과 당해 평가원의 출제 기조에 기반한 경향성에 중점을 둔 교재입니다. 당해 평가원의 출제경향과 EBS 변형 Point를 예측하여 최고의 실전감을 선물합니다. |
| - 수학 1<br>- 수학 2 (상) (하)<br>- 미적분 (상) (하)<br>- 확률과 통계 | - 수학1+확통 (4월 출판 예정)<br>- 수학2 (5월 출판 예정)<br>- 미적분 (5월 출판 예정) | - 가형 (7월 출판 예정)<br>- 나형 (8월 출판 예정) |

# 교재 이용법

원활한 교재 이용을 위해 대단원, 중단원, 중소단원, 소단원 구분법을 소개하겠습니다.

대단원 제목입니다.




여사건, 부분 여사건, 포함 배제의 원리

대단원에 속한 중단원 제목입니다.

◆ 여사건

중단원에 속한 중소단원 제목입니다.

◆ 1. 조건이 2개일 때의 포함 배제의 원리

중소단원에 속한 소단원 제목입니다.

(1) 바로 쓰기 좋은 두 조건 $p_1$, $p_2$를 동시에 만족시키는 경우의 수

위를 참고하여 학습하신다면 Chapter 내용이 더욱 유기적으로 연결될 것입니다. 헷갈린다면 Chapter를 순서대로 읽어나가셔도 전혀 문제가 없습니다.

원활한 교재 이용을 위해 예시, 예시 해설, 유제, 유제 해설 구분법을 소개하겠습니다.

본문과 함께 소개되는 예시입니다. 칼럼을 읽다 보면 중간중간에 예시들이 등장합니다.

**19학년도 수능특강 변형**

1~8까지 적힌 정팔면체 주사위를 한 번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수의 표본공간을 $S$라 하자. 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 홀수인 사건을 $A$라 할 때, $S$의 부분집합인 사건 $B$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 사건 $A$, $B$는 서로 배반사건이다.
(나) $n(B)=2$

사건 $B$의 모든 원소의 합을 $k$라고 할 때, $k$의 최솟값을 구하시오.

본문과 함께 소개되는 예시 해설입니다. 자세하고 본문에서 배운 도구와 태도를 일관적으로 적용합니다.

1. 정팔면체 주사위를 한 번 던지는 시행의 표본공간을 $S$라 하자.
$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$이고, $A=\{1,3,5,7\}$이다.

2. 두 사건 $A$, $B$는 서로 배반사건이므로
$B\subset\{2,4,6,8\}$이고 조건 (나)에 의해 $n(B)=2$이다.

3. $B$의 모든 원소의 합 $k$가 최소가 되려면 $B=\{2,4\}$가 되어야 한다. 따라서 **답은 6!!**

본문 내용을 체화하기 위한 유제입니다.

CHAPTER 02 문제

01 **16학년도 6월 평가원 27번**

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$, $u$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수를 구하시오.

(가) $x+y+z+u=6$
(나) $x \neq u$

유제 해설지의 유제 해설입니다. 자세하고 본문에서 배운 도구와 태도를 일관적으로 적용합니다.

CHAPTER 02 해설

**01 16학년도 6월 평가원 27번**

**답 : 68**

1. **먼저 실수를 방지하기 위해 '음이 아닌 정수'에 동그라미 쳐주자.** 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 중복조합(${}_4\mathrm{H}_6$)을 쓰든 이후에 소개해 주는 방법(${}_9\mathrm{C}_3$)으로 하든 84가지이다.

위를 참고하여 학습하신다면 교재 이용이 더욱 편리합니다.

# 파급의 기출효과

cafe.naver.com/spreadeffect
파급의 기출효과 NAVER 카페

**학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다.**
교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

파급효과, 기대t, 출기능수님, 백건아님 등등 **오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다.**
위 저자 분들의 컨텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

이외에도 **검증된 우수한 컨설팅 팀 TWCG가 정리한 과거부터 현재까지 정시, 수시 입결을 확인할 수 있습니다.**
입시에 대한 질문은 가입하시기만 하면 TWCG 팀장 및 팀원분들께 하실 수 있습니다.

더 궁금하시다면 https://cafe.naver.com/spreadeffect/15에서 확인하시면 됩니다.

CHAPTER

# 02 여사건, 부분 여사건, 포함 배제의 원리

## 여사건

**경우의 수와 확률 문제의 0순위 유력 후보**이다. 전체 사건에서 여사건을 빼서 목표 사건을 구하는 것이다. 잘 알려진 여사건 암시 힌트로는 '적어도~'가 있다. 하지만 꼭 '적어도~'가 나온다고 여사건을 이용할 필요는 없고 '적어도~'가 없어도 여사건 이용이 편할 때도 많다.

**여사건을 이용하는 게 더 쉬우려면**

**1. 전체 사건을 구하기 쉬워야 한다.**
**2. 여사건 구하기가 목표 사건 구하기보다 쉬워야 한다.**

여사건부터 생각해서 손해 볼 거 없다.
경우의 수와 확률 문제에서 여사건을 먼저 생각하고 전체 사건을 구하기 어렵거나 여사건 자체를 구하기 힘들다면 그때만 목표 사건을 직접 구하자.

**20학년도 9월 평가원 10번**

1부터 7까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 3개의 수의 곱을 $a$, 선택되지 않은 4개의 수의 곱을 $b$라 할 때, $a$와 $b$가 모두 짝수일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{9}{14}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

1. 1부터 7까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3 = 35$가지이다.

2. 여사건이 더 편할까? $a$, $b$ 모두가 짝수가 되기 위해서는 선택받은 3개의 수 중에 적어도 하나 이상의 짝수가 있어야 하고 선택받지 못한 4개의 수 중에도 적어도 하나 이상의 짝수가 있어야 한다.

   '$a$, $b$ 모두가 짝수인 사건'의 여사건은 '$a$ 또는 $b$가 홀수인 사건'이다. **여러 숫자들의 곱이 홀수가 되기 위해서는 숫자들이 모두 홀수이면 된다.** 1부터 7까지의 자연수 중에는 짝수가 존재하기에 $a$, $b$ **모두 홀수가 되는 사건은 있을 수 없다.** 따라서 여사건을 이용하는 것이 훨씬 편하다.

3. '$a$, $b$ 모두가 홀수인 사건'은 없기에 '$a$**가 홀수인 사건'과 '**$b$**가 홀수인 사건'의 경우의 수를 각각 구하여 더한 것이 '**$a$, $b$ **모두가 짝수인 사건'의 여사건**이다.

   (1) $a$가 홀수일 때
   홀수 1, 3, 5, 7 중 3개의 수를 선택하면 $a$가 홀수이고 $b$는 짝수이다. 따라서 $a$가 홀수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$가지이다.

   (2) $b$가 홀수일 때
   짝수 2, 4, 6 중 3개의 수를 선택하면 $a$가 짝수이고 $b$는 홀수 1, 3, 5, 7의 곱이므로 홀수이다. 따라서 $b$가 홀수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_4 = 1$가지이다.

   '$a$, $b$ 모두가 짝수인 사건'의 여사건의 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_4 = 5$가지이다.
   따라서 '$a$, $b$' 모두가 짝수인 사건'의 경우의 수는 $35 - 5 = 30$가지이다.

4. 1부터 7까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택할 때, $a$, $b$ 모두 짝수일 확률은 $\frac{30}{35} = \frac{6}{7}$이므로 **답은 ⑤!!**

comment

여사건부터 생각한 다음, **여사건이 더 힘들다 싶으면 목표 사건을 구하자.**

**11학년도 9월 평가원 나형 24번**

주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 $A$라 하자. 시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 $A$가 일어나지 않고, 6회에서 사건 $A$가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. **문제 상황파악을 위해** 직접 각 카드에 스티커를 붙이고 각 스티커 수를 3으로 나눈 나머지의 변화를 살펴보자. 카드에 붙어 있는 스티커 수를 3으로 나눈 나머지를 $(a, b, c)$로 나타내겠다.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0회 | $(1, 2, 0)$ | | | | | | | | |
| 1회 | $(2, 2, 0)$ | | | $(1, 0, 0)$ | | | $(1, 2, 1)$ | | |
| 2회 | $(0, 2, 0)$ | $(2, 0, 0)$ | $(2, 2, 1)$ | $(2, 0, 0)$ | $(1, 1, 0)$ | $(1, 0, 1)$ | $(2, 2, 1)$ | $(1, 0, 1)$ | $(1, 2, 2)$ |

2회까지는 사건 $A$가 발생하지 않는다. 다만, **3회에 스티커를 어느 카드에 붙이냐에 따라 사건 $A$가 발생할 수 있다.**

2회의 $(2, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(1, 2, 2)$의 경우에는 첫 번째 카드에 스티커를, 2회의 $(0, 2, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$의 경우에는 두 번째 카드에 스티커를, 2회의 $(2, 2, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$의 경우에는 세 번째 카드에 스티커를 붙이면 **3회에 사건 $A$가 발생한다. 따라서 시행 1회에서 3회까지 사건 $A$가 일어날 확률은 $\frac{9}{3^3}=\frac{1}{3}$이다.**

2. 3회에 사건 $A$가 일어나면 안 된다. **시행 1회에서 3회까지 사건 $A$가 일어나지 않을 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.** 3회에 사건 $A$가 일어나지 않는다면 각 카드에 붙어 있는 스티커 수를 3으로 나눈 나머지는 서로 다르다.

**3회에 사건 $A$가 일어나지 않는다면** 0회와 같은 상황이다. 따라서 **4회, 5회에서는 사건 $A$가 발생하지 않는다. 다만, 6회에 스티커를 어느 카드에 붙이냐에 따라 사건 $A$가 발생할 수 있다. 시행 4회에서 6회까지 사건 $A$가 일어날 확률은 $\frac{9}{3^3}=\frac{1}{3}$이다.**

결론적으로 1회부터 5회까지는 사건 $A$가 일어나지 않고, 6회에서 사건 $A$가 일어날 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$이다. $p=9, q=2, p+q=11$이므로 **답은 11!!**

**comment**

시행 1회에서 3회까지 사건 $A$가 일어나지 않을 확률을 구할 때 여사건을 이용하였기에 Chapter 2의 예시로 넣었지만 이보다 **상황파악을 어떻게 하는지가 더 중요**하다.

상황파악이 쉽게 되지 않는 문제이다. 대다수 경우의 수, 확률 기출에서 상황파악이 비교적 쉬운 것을 고려하면 이 문제는 특이한 문제이다. 하지만 경우의 수, 확률이 어렵게 나온다면 어떤 식으로 나올 수 있는지를 보여준다. 20학년도 6월 평가원에서 경우의 수, 확률이 어렵게 나온 만큼 더욱 주의 깊게 봐야 할 문제이다.

**상황파악이 당장 되지 않는다면 귀찮음을 이겨내는 인내심과 용기를 가지고 문제에 나온 설명대로** 직접 시행하며 상황을 파악**하자.** 분명 규칙성을 발견할 수 있을 것이다.

## 부분 여사건

이 책에서만 편의를 위해 사용하는 단어이다. 부분 여사건은 여사건의 더 디테일한 활용이다.
조건 (가), 조건 (나)가 있고 두 조건 모두를 만족하는 경우의 수를 구한다고 해보자.
(가) $\cap$ (나)에 해당하는 경우의 수를 바로 구할 수도 있지만 너무 복잡해지는 경우도 발생한다.
이때, 부분 여사건을 다음과 같이 사용한다.

**조건 (가)를 만족시키는 경우의 수에서 조건 (가)는 만족시키지만 조건 (나)는 만족시키지 않는 경우의 수를 뺀다.** 집합으로 표현하면 (가) $-$ {(가) $\cap$ (나)$^C$}에 해당하는 경우의 수를 구하면 된다.

※ (가) $-$ {(가) $\cap$ (나)$^C$} 대신 (나) $-$ {(나) $\cap$ (가)$^C$}를 이용해도 된다.

### 17학년도 수능 27번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a, b, c$의 모든 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수를 구하시오. [4점]

| |
|---|
| (가) $a+b+c=7$ |
| (나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다. |

1. **먼저 실수를 방지하기 위해 '음이 아닌 정수'에 동그라미 쳐주자.** 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 중복조합(${}_3\mathrm{H}_7$)을 쓰든 이후에 소개해 주는 방법(${}_9\mathrm{C}_2$)으로 하든 36가지이다. 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수를 구하는 것은 그리 어렵지 않았다.

2. 조건 (나)를 수식으로 표현하면 $a+2b \geq 3$이다. 항상 '여사건이 더 편할까?'부터 고려한다. **목표 사건을 여사건 없이 맨땅에 헤딩하듯 구하려 하면 $a, b$로 가능한 경우가 너무 많다는 것을 알 수 있다.** 이렇게 되면 실수가 안 나오는 게 이상하다. 하지만 답을 구하고 검토할 때 이 방법을 쓰는 건 나쁘지 않은 선택이다. **답을 알고 풀면 실수를 해도 금방 알아차린다.**

3. $a+2b<3$의 경우 $a, b$**로 가능한 경우가 얼마 없다!** 따라서 조건 (가)를 만족시키면서 조건 (나)는 만족시키지 않는 경우인 (가)$\cap$(나)$^C$를 구하고 조건 (가)를 만족시키는 36가지에서 빼면 된다.

$a+2b=0 \rightarrow (a,b)=(0,0)$

$a+2b=1 \rightarrow (a,b)=(1,0)$

$a+2b=2 \rightarrow (a,b)=(2,0),\ (0,1)$

조건 (가)를 만족시키면서 조건 (나)는 만족시키지 않는 경우인 (가)$\cap$(나)$^C$는 4가지이다. 따라서 조건 (가), 조건 (나)를 동시에 만족시키는 경우의 수는 $36-4=32$가지이다. **답은 32!!**

**comment**

이 당시, 조건 (나)를 $a+2b \geq 3$가 아닌 '$a+2b$가 3의 배수'로 잘못 해석한 학생들이 많았다.
또한, 많은 학생들이 부분 여사건을 사용하지 않고 목표 사건을 구하려 했기에 엄청난 오답률을 자랑했다. 일단 여사건부터 생각한 다음, 여사건이 더 힘들다 싶으면 목표 사건을 구하자.

**19학년도 9월 평가원 28번**

방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a, b, c$의 모든 순서쌍 $(a, b, c)$ 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 $(a, b, c)$가 $a<2$ 또는 $b<2$를 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. **먼저 실수를 방지하기 위해 음이 아닌 정수에 동그라미 쳐주자.** $a+b+c=9$를 조건 (가)로 두자. $a+b+c=9$를 만족시키는 경우의 수는 중복조합(${}_3\mathrm{H}_9$)을 쓰든 이후에 소개해 주는 방법(${}_{11}\mathrm{C}_2$)으로 하든 55가지이다.

2. 여사건이 더 편할까? '$a<2$ 또는 $b<2$이다.'를 조건 (나)로 두자. (나)$^C$는 $a \geq 2$, $b \geq 2$를 **동시에 만족시키는 순서쌍** $(a, b, c)$**의 개수이다.** (가)$\cap$(나)를 **만족시키는 순서쌍** $(a, b, c)$**의 개수보다** (가)$\cap$(나)$^C$를 만족시키는 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수를 구하기가 훨씬 쉬워 보인다.

3. (가)$\cap$(나)$^C$는 $a+b+c=9\ (a \geq 2, b \geq 2, c \geq 0)$을 만족시키는 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수이다. 중복조합(${}_3\mathrm{H}_5$)을 쓰든 후에 소개해 주는 방법(${}_7\mathrm{C}_2$)으로 하든 21가지이다. 따라서 조건 (가), 조건 (나)를 동시에 만족시키는 경우의 수는 $55-21=34$가지이다.

4. 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(a, b, c)$ 중 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(a, b, c)$를 고를 확률은 $\frac{34}{55}$이다. $p=55, q=34, p+q=89$이므로 **답은 89!!**

comment

부분 여사건을 이용하면 쉽게 풀린다. 여사건부터 생각한 다음, **여사건이 더 힘들다 싶으면 목표 사건을 구하자.**

**18학년도 수능 28번**

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 모든 순서쌍 $(x, y, z)$ 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 $(x,y,z)$가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$을 만족시킬 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. **먼저 실수를 방지하기 위해 음이 아닌 정수에 동그라미 쳐주자.** $x+y+z=10$를 조건 (가)로 두자. $x+y+z=10$를 만족시키는 경우의 수는 중복조합(${}_3\mathrm{H}_{10}$)을 쓰든 이후에 소개해 주는 방법(${}_{12}\mathrm{C}_2$)으로 하든 66가지이다.

2. 여사건이 더 편할까? '$(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$'를 조건 (나)로 두자. (나)$^C$는 $x=y$ **또는** $y=z$ **또는** $z=x$**를 만족시키는 순서쌍** $(x, y, z)$**의 개수이다.**

   $x+y+z=10$**이므로** $x=y=z$**, 즉** $x=y$**,** $y=z$**,** $z=x$**를 동시에 만족할 수는 없다.**
   (가)$\cap$(나)를 **만족시키는 순서쌍** $(x, y, z)$**의 개수보다** (가)$\cap$(나)$^C$를 만족시키는 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수를 구하기가 훨씬 쉬워 보인다.

3. (가)$\cap$(나)$^C$는 $x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$이며 $x+y+z=10$를 **만족시키는 순서쌍** $(x, y, z)$**의 개수이다.**

   $x=y$, $x+y+z=10$를 동시에 만족하는 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수를 구해보자.
   이는 곧 $2x+z=10$를 만족하는 순서쌍 $(x, z)$의 개수를 구하는 것과 같다.
   $2x+z=10$를 만족하는 순서쌍 $(x, z)$는 $(0, 10)$, $(1, 8)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 0)$로 6개이다.

   위와 같은 방법으로 $y=z$, $x+y+z=10$를 만족하는 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수와
   $z=x$, $x+y+z=10$를 만족하는 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수가 모두 각각 6개임을 알 수 있다.

   따라서 (가)$\cap$(나)$^C$에 해당하는 경우의 수는 $6\times3=18$이다.

4. 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(x, y, z)$ 중 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(x, y, z)$를 고를 확률은 $1-\frac{18}{66}=\frac{8}{11}$이다. $p=11, q=8, p+q=19$이므로 **답은 19!!**

**comment**

부분 여사건을 이용하면 쉽게 풀린다. 여사건부터 생각한 다음, **여사건이 더 힘들다 싶으면 목표 사건을 구하자.**

## 20학년도 수능 나형 29번

세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 사탕 6개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 학생 A가 받는 사탕의 개수는 1 이상이다.
(나) 학생 B가 받는 초콜릿의 개수는 1 이상이다.
(다) 학생 C가 받는 사탕의 개수와 초콜릿의 개수의 합은 1 이상이다.

1. 세 명의 학생 A, B, C가 받는 사탕의 개수를 각각 $a_1$, $b_1$, $c_1$이라 하고 초콜릿의 개수를 각각 $a_2$, $b_2$, $c_2$라 하자.

조건 (가), 조건 (나)를 모두 만족하기 위해서는 $a_1+b_1+c_1=6$ $(a_1 \geq 1, b_1 \geq 0, c_1 \geq 0)$, $a_2+b_2+c_2=5$ $(a_2 \geq 0, b_2 \geq 1, c_2 \geq 0)$를 동시에 만족하면 된다.

$a_1+b_1+c_1=6$ $(a_1 \geq 1, b_1 \geq 0, c_1 \geq 0)$를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_3\mathrm{H}_5$)을 쓰든 이후에 소개해 주는 방법(${}_7\mathrm{C}_2$)으로 하든 21가지이다.

$a_2+b_2+c_2=5$ $(a_2 \geq 0, b_2 \geq 1, c_2 \geq 0)$를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_3\mathrm{H}_4$)을 쓰든 이후에 소개해 주는 방법(${}_6\mathrm{C}_2$)으로 하든 15가지이다.

따라서 조건 (가), 조건 (나)를 모두 만족하는 경우의 수는 $21 \times 15 = 315$가지이다.

2. (가) ∩ (나)를 조건 (라)라고 하자. 이제 (다) ∩ (라)에 해당하는 사건의 경우의 수를 구하면 된다. 여사건이 더 편할까? **(다)$^C$는 학생 C가 사탕과 초콜릿을 아예 받지 않을 때이다. (다) ∩ (라)를 만족시키는 경우의 수보다** (다)$^C$ ∩ (라)를 만족시키는 경우의 수를 구하기가 훨씬 쉬워 보인다.

3. (다)$^C$ ∩ (라)는 $c_1=c_2=0$이다.
즉, $a_1+b_1=6$ $(a_1 \geq 1, b_1 \geq 0)$, $a_2+b_2=5$ $(a_2 \geq 0, b_2 \geq 1)$를 동시에 만족하면 된다.

$a_1+b_1=6$ $(a_1 \geq 1, b_1 \geq 0)$를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_2\mathrm{H}_5$)을 쓰든 이후에 소개해 주는 방법(${}_6\mathrm{C}_1$)으로 하든 6가지이다.

$a_2+b_2=5$ $(a_2 \geq 0, b_2 \geq 1)$를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_2\mathrm{H}_4$)을 쓰든 이후에 소개해 주는 방법(${}_5\mathrm{C}_1$)으로 하든 5가지이다.

따라서 (다)$^C$ ∩ (라)에 해당하는 경우의 수는 $6 \times 5 = 30$가지이다.

4. (라)에 해당하는 경우의 수는 315가지이고 (다)$^C$ ∩ (라)에 해당하는 경우의 수는 $6 \times 5 = 30$가지이므로 (다) ∩ (라)에 해당하는 경우의 수는 $315 - 30 = 285$가지이다. **답은 285!!**

comment

부분 여사건을 이용하면 쉽게 풀린다. 조건이 3개씩이나 주어진 상황에서 부분 여사건을 적용하는 신선한 문제였다. 여사건부터 생각한 다음, **여사건이 더 힘들다 싶으면 목표 사건을 구하자.**

## ◈ 포함 배제의 원리

부분 여사건의 심화 단계로 포함 배제의 원리에 대해 알아보자.
뭔가 새로운 것을 갈망하는 학생들에게 반가운 단원일지 모르겠다.
하지만 전혀 새로운 내용이 아니며, 우리가 이미 배운 내용임을 강조하고 싶다.

먼저 고등학교 1학년 수학에서 배운 집합으로 경우의 수를 표현해보자.

유한집합 $U$에 대하여 주어진 조건 $p_n$의 진리집합을 $A_n$이라 하자. ($n$은 자연수)

문제의 조건에서 $p_1$과 $p_2$를 **동시에** 만족시키는 경우의 수는 $n(A_1 \cap A_2)$이다.
문제의 조건에서 $p_1$과 $p_2$ 중 **적어도 하나**를 만족시키는 경우의 수는 $n(A_1 \cup A_2)$이다.
문제의 조건에서 $p_1$과 $p_2$ 중 **오직 하나만** 만족시키는 경우의 수는 $n(A_1 \cup A_2) - n(A_1 \cap A_2)$이다.

$n(A_1 \cup A_2)$는 계산하기 어렵다.
두 조건 $p_1$과 $p_2$를 둘 다 만족시킬 필요가 없는 특성상 둘 중 하나만 만족시켜도 되고, 혹은 둘 다 만족시켜도 된다. 즉, 가능한 case의 수가 $p_1$만 만족하는 경우, $p_2$만 만족하는 경우, $p_1, p_2$ 모두 만족하는 경우로 3개이다. 매우 불편한 부분이다.

그나마 조건이 두 개 $(p_1, p_2)$라서 다행이었다. 조건을 세 개 $(p_1, p_2, p_3)$으로 늘렸을 때는?
세 조건 중 적어도 하나를 만족시키는 경우의 수를 구하라는 문제를 풀 때, 벌써 고려해야 하는 case가 7가지이다. 조건이 많아질수록 더 불편해진다.

반면 $n(A_1 \cap A_2)$를 구하려면 두 조건 $p_1$과 $p_2$를 둘 다 만족시키는 한 가지의 case만 고려하면 된다.
$n(A_1 \cup A_2)$를 구하는 것보다 훨씬 수월하다.

하지만 이런 문제가 있다고 하자.

**예제 1**

같은 연필 4개, 같은 지우개 5개를 세 학생 K, B, S에게 남김없이 나눠주려고 한다. 세 학생 중 학용품을 받지 못한 학생이 없도록 하는 경우의 수를 구하시오.

불편함을 넘어서서, 너무 어렵다. 왜? 세 학생이 각각 몇 개의 학용품을 받을지 모르기 때문이다.
설령 몇 개씩 받을지 정해져 있더라도 연필 몇 개와 지우개 몇 개로 구성되어있을지 모르기 때문에, 또 한 사람이 연필이나 지우개를 너무 많이 받아버리면 다른 사람은 연필이나 지우개를 받을 수 없는 것까지 고려하기 때문에 어렵다.

이 문제가 어려울 수밖에 없는 이유를 집합의 측면에서 바라봐보자.
집합을 이용해서 이 문제의 정답을 바로 구하기 어려운 이유에 대해서 알아보는 거다.
'학생 K가 학용품을 받는다.'에 해당하는 조건 $p_1$의 진리집합을 $A_1$,
'학생 B가 학용품을 받는다.'에 해당하는 조건 $p_2$의 진리집합을 $A_2$,
'학생 S가 학용품을 받는다.'에 해당하는 조건 $p_3$의 진리집합을 $A_3$라 하면
문제에서 요구하는 경우의 수는 $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$이다.

분명 합집합보단 교집합일 때 쉽다고 했는데 왜 어려울까?

생각해보면, $n(A_1), n(A_2), n(A_3)$ 각각 세기 힘든 반면에 $n(A_1{}^C), n(A_2{}^C), n(A_3{}^C)$은 매우 세기 쉽다는 것이 눈에 들어올 것이다. 왜냐하면 $A_1{}^C, A_2{}^C, A_3{}^C$는 각각 학생 K, B, S가 학용품을 받지 않는 경우에 해당하므로, 이 경우 특정 학생을 학용품 배부에서 배제하고 생각할 수 있다는 강점이 있기 때문이다.

따라서, 쉬운 문제 풀이를 위해
1. 여사건이 편리한 조건은 여사건을 활용하는 능력
2. 합집합이 있다면 교집합으로 돌려 풀 수 있는 능력
이 필요하다는 것을 알 수 있다. 참고로, 이 두 능력 중 우선시되어야 하는 능력은 '문제'가 결정한다. 뒤의 예제들에서 구경할 예정이다.

더 자세한 얘기는 **예제 1**의 스포일러가 되므로,
이를 위한 개념공부를 뒤에서 한 뒤 다시 **예제 1**로 돌아가 문제를 풀어보도록 하겠다.

## 1. 조건이 2개일 때의 포함 배제의 원리

조건이 2개일 때의 포함 배제의 원리를 살펴보자.
조건이 2개인 경우엔 총 여섯 개의 case로 나눌 수 있다.

**1. 바로 쓰기 좋은 두 조건 $p_1, p_2$를 동시에 만족시키는 경우의 수**
**2. 바로 쓰기 좋은 두 조건 $p_1, p_2$ 중 적어도 하나를 만족시키는 경우의 수**

**3. 바로 쓰기 쉬운 조건 $p_1$과 바로 쓰기 어려운 조건 $p_2$를 동시에 만족시키는 경우의 수**
**4. 바로 쓰기 쉬운 조건 $p_1$과 바로 쓰기 어려운 조건 $p_2$ 중 적어도 하나를 만족시키는 경우의 수**

**5. 바로 쓰기 어려운 두 조건 $p_1, p_2$를 동시에 만족시키는 경우의 수**
**6. 바로 쓰기 어려운 두 조건 $p_1, p_2$ 중 적어도 하나를 만족시키는 경우의 수**

case가 많아서 '잘 이해가 안 되네. 외워버려야지.' 하는 순간, 헛공부하는 셈이 된다.
절대 그러지 말자. '이해'에 중점을 두고 공부해야 약이 된다.

### (1) 바로 쓰기 좋은 두 조건 $p_1$, $p_2$를 동시에 만족시키는 경우의 수

$n(A_1 \cap A_2)$를 바로 계산하면 된다. 대부분 쉬운 문제가 여기에 해당한다.

**예제 2. 11학년도 수능 6번**

어느 행사장에는 현수막을 1개씩 설치할 수 있는 장소가 5곳이 있다. 현수막 $A$, $B$, $C$ 세 종류가 있고, $A$는 1개, $B$는 4개, $C$는 2개가 있다. 다음 조건을 만족시키도록 현수막 5개를 택하여 5곳에 설치할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 현수막끼리는 구분하지 않는다.) [3점]

(가) $A$는 반드시 설치한다.
(나) $B$는 2곳 이상 설치한다.

① 55 ② 65 ③ 75 ④ 85 ⑤ 95

1. 두 조건 (가), (나)는 쉽게 적용할 수 있으므로 별다른 작업을 거치지 않아도 된다.
사용하는 $B$의 개수에 따라 case를 분류하자.

(1) $B$가 $2$개 쓰일 때

$A$, $B$, $B$, $C$, $C$를 5곳에 설치하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\,2!}=30$이다.

(2) $B$가 $3$개 쓰일 때

$A$, $B$, $B$, $B$, $C$를 5곳에 설치하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!}=20$이다.

(3) $B$가 $4$개 쓰일 때

$A$, $B$, $B$, $B$, $B$를 5곳에 설치하는 경우의 수는 $\frac{5!}{4!}=5$이다.

2. 조건을 모두 만족하며 현수막 5개를 택하여 5곳에 설치하는 경우의 수는 $30+20+5=55$이다.
**답은 ①!!**

### (2) 바로 쓰기 좋은 두 조건 $p_1,\ p_2$ 중 적어도 하나를 만족시키는 경우의 수

$n(A_1 \cup A_2)$을 계산하면 된다. $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$로 계산하자.

조건이 하나씩만 걸려 있는 $n(A_1),\ n(A_2)$와 교집합으로 연결돼있는 $n(A_1 \cap A_2)$는 각각 구하기 쉬우므로 이렇게 접근하는 게 편하다.

**예제 3**

집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f\ :\ X \to X$ 의 개수를 구하시오.

| |
|---|
| (가) 함수 $f$의 역함수가 존재한다.<br>(나) $f(1) = 1$ 또는 $f(2) = 2$ |

1. 조건 (가)에 의하여 정의역의 각 원소는 서로 다른 함숫값들에 대응되어야 함을 쉽게 알 수 있다.
주목할 부분은 조건 (나)이다. 조건 (나)는 ‘또는’으로 연결되어 있다.

조건 $f(1)=1$을 만족시키는 진리집합을 $A_1$, 조건 $f(2)=2$를 만족시키는 진리집합을 $A_2$라 하면 구하는 경우의 수는 $n(A_1 \cup A_2)$ 이다.

2. 이때, 합집합이 등장해서 구하기 껄끄러우므로 $n(A_1 \cup A_2)=n(A_1)+n(A_2)-n(A_1 \cap A_2)$를 적용하자.

$n(A_1)$는 일대일대응이면서 $f(1)=1$인 함수들의 개수를 구하면 되므로 $4!$이다.
$n(A_2)$는 일대일대응이면서 $f(2)=2$인 함수들의 개수를 구하면 되므로 $4!$이다.
$n(A_1 \cap A_2)$는 일대일대응이면서 $f(1)=1$, $f(2)=2$를 동시에 만족시키는 함수의 개수를 구하면 되므로 $3!$이다.

$n(A_1 \cup A_2)= 4!+4!-3! = 42$이므로 조건을 모두 만족하는 함수 $f$의 개수는 42이다. **답은 42!!**

### (3) 바로 쓰기 쉬운 조건 $p_1$과 바로 쓰기 어려운 조건 $p_2$를 동시에 만족시키는 경우의 수

$n(A_1 \cap A_2)$를 계산해야 한다. 그런데 $p_2$를 다루기 까다로울 때가 있다. **이땐 조건 $p_2$의 여사건을 떠올린다.**
즉, 우리가 계산하려는 식을 $n(A_1 \cap A_2) = n\left(A_1 \cap \left({A_2}^C\right)^C\right) = n(A_1) - n\left(A_1 \cap {A_2}^C\right)$으로 조작하는 것이다.
이전에 배운 **부분 여사건**이 여기에 속한다.

이때 주의해야 하는 것은 $n\left(A_1 \cap \left({A_2}^C\right)^C\right) = n(A_1) - n\left(A_1 \cap {A_2}^C\right)$이다.
원래 일반적인 집합의 성질에 의하면 $A_1 \cap \left({A_2}^C\right)^C = A_1 - {A_2}^C$이기 때문에
$n\left(A_1 \cap \left({A_2}^C\right)^C\right) = n(A_1) - n\left({A_2}^C\right)$으로 착각할 가능성이 크다. 착각하지 않도록 꼭 주의하자.

$n(A_1 \cap A_2) = n(A_1) - n\left(A_1 \cap {A_2}^C\right)$ 잘 기억해두자. 이전에 **'부분 여사건'**으로 소개한 부분이다.

### 예제 4. 16학년도 6월 평가원 27번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$, $u$의 모든 순서쌍 $(x, y, z, u)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x+y+z+u=6$
(나) $x \neq u$

1. 조건 (가)는 바로 쓰기 좋은데 조건 (나)는 그대로 쓰는 것보다 여사건, 즉 $x=u$를 쓰기가 편하다.
따라서 $n(A_{가}\cap A_{나})=n(A_{가}\cap(A_{나}{}^{C})^{C})=n(A_{가})-n(A_{가}\cap A_{나}{}^{C})$을 사용하여 구해주자.

2. $x+y+z+u=6$을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_6=84$이므로 $n(A_{가})=84$이다.

3. $n(A_{가}\cap A_{나}{}^{C})$는 $x+y+z+u=6$, $x=u$를 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수이다.
$x=u$의 값을 기준으로 case를 분류하자.

(1) $x=u=0$
$x=u=0$이면 $y+z=6$이다. 이를 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_6=7$이다.

(2) $x=u=1$
$x=u=1$이면 $y+z=4$이다. 이를 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_4=5$이다.

(3) $x=u=2$
$x=u=2$이면 $y+z=2$이다. 이를 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_2=3$이다.

(4) $x=u=3$
$x=u=3$이면 $y+z=0$이다. 이를 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_0=1$이다.

4. 따라서 $n(A_{가}\cap A_{나}{}^{C})=7+5+3+1=16$이다.
조건을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$ 의 개수는 $84-16=68$이다. **답은 68!!**

### 예제 5. 18학년도 9월 평가원 나형 16번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는? [4점]

(가) $x+y+z=10$
(나) $0<y+z<10$

① 39 ② 44 ③ 49 ④ 54 ⑤ 59

1. 조건 (가)는 바로 쓰기 좋은데 조건 (나)는 그대로 쓰는 것보다 여사건, 즉 $y+z=0$ 또는 $y+z=10$을 쓰기가 편하다. $n(A_{가} \cap A_{나})=n(A_{가})-n\left(A_{가} \cap A_{나}{}^{C}\right)$을 사용하여 구해주자.

2. $x+y+z=10$을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{10}=66$이므로 $n(A_{가})=66$이다.

3. $n\left(A_{가} \cap A_{나}{}^{C}\right)$는 $x+y+z=10$, $y+z=0$ 또는 $x+y+z=10$, $y+z=10$을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수이다. $y+z$의 값을 기준으로 case를 분류하자.

   $y+z=0$이면 $x=10$이다. $y+z=0$을 만족하는 순서쌍 $(y,\ z)$ 개수는 ${}_{2}\mathrm{H}_{0}=1$이다.
   $y+z=10$이면 $x=0$이다. $y+z=10$을 만족하는 순서쌍 $(y,\ z)$ 개수는 ${}_{2}\mathrm{H}_{10}=11$이다.

   따라서 $n\left(A_{가} \cap A_{나}{}^{C}\right)=1+11=12$이다.

4. 조건을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 의 개수는 $66-12=54$이다. **답은 54!!**

### (4) 바로 쓰기 쉬운 조건 $p_1$과 바로 쓰기 어려운 조건 $p_2$ 중 적어도 하나를 만족시키는 경우의 수

$n(A_1 \cup A_2)$를 계산해야 한다. $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$로 계산하자.

**(3) 바로 쓰기 쉬운 조건 $p_1$과 바로 쓰기 어려운 조건 $p_2$를 동시에 만족시키는 경우의 수**에서와 마찬가지로 $p_2$가 다루기 어려울 땐 $p_2$의 여사건을 적극적으로 활용하자.

$n(A_2) = n(S) - n(A_2{}^C)$로 계산하고 $n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap (A_2{}^C)^C) = n(A_1) - n(A_1 \cap A_2{}^C)$로 계산하여 $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$에 대입하자.

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2) &= n(A_1) + \{n(S) - n(A_2{}^C)\} - \{n(A_1) - n(A_1 \cap A_2{}^C)\} \\ &= n(S) - n(A_2{}^C) + n(A_1 \cap A_2{}^C) \end{aligned}$$

로 식을 정리할 수 있다.

이때, 대입해서 식을 정리한 결과인 $n(A_1 \cup A_2) = n(S) - n(A_2{}^C) + n(A_1 \cap A_2{}^C)$만 단순히 외우지 않는 것이 중요하다.

지금 같은 경우는 $n(A_2) = n(S) - n(A_2{}^C)$, $n(A_1 \cap A_2) = n(A_1) - n(A_1 \cap A_2{}^C)$를 모두 적용해줬지만, 문제의 상황에 따라서 둘 중 하나만 적용해줘야 문제가 쉽게 풀리는 경우가 충분히 나올 수 있기 때문이다.

**예제 6**

집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오.

(가) 함수 $f$의 역함수가 존재한다.
(나) $f(1) = 1$ 또는 $f(2) \neq 2$

1. 조건 (가)에 의하여 정의역의 각 원소는 서로 다른 함숫값들에 대응되어야 함을 쉽게 알 수 있다.
조건 (나)가 '또는'으로 연결되어 있다.

조건 $f(1)=1$을 만족시키는 진리집합을 $A_1$, 조건 $f(2)\neq 2$를 만족시키는 진리집합을 $A_2$라 하면 구하는 경우의 수는 $n(A_1\cup A_2)$이다.

2. $n(A_1\cup A_2)=n(A_1)+n(A_2)-n(A_1\cap A_2)$를 적용하자.

$n(A_1)$는 일대일대응이면서 $f(1)=1$인 함수들의 개수를 구하면 되므로 $4!=24$이고,
$n(A_2)$는 일대일대응 함수 중 $f(2)=2$인 일대일대응 함수를 빼주면 된다.
즉, 여사건을 쓰겠다는 것이다. $n(A_2)=5!-4!=96$이다.

$n(A_1\cap A_2)$는 일대일대응이면서 $f(1)=1,\ f(2)\neq 2$를 동시에 만족시키는 함수의 개수를 구하면 되므로 $4!-3!=18$이다.

$n(A_1\cup A_2)=n(A_1)+n(A_2)-n(A_1\cap A_2)=24+96-18=102$이다. **답은 102!!**

※ 여기에서 $n(A_1\cap A_2)=n(A_1)-n(A_1\cap A_2{}^C)$를 이용하지 않았다. **굳이 이를 이용하지 않고 $n(A_1\cap A_2)$를 구하는 게 더 편하기 때문이다.** 위에서 경고했듯이 결과식만 외워서 이용하지 않았다. 그렇기에 조금 더 수월하게 구할 수 있었다.

**(5) 바로 쓰기 어려운 두 조건 $p_1$, $p_2$를 동시에 만족시키는 경우의 수**

$n(A_1 \cap A_2)$를 계산해야 한다.

**(3) 바로 쓰기 쉬운 조건 $p_1$과 바로 쓰기 어려운 조건 $p_2$를 동시에 만족시키는 경우의 수**에서와 같은 방식으로 해주면, 드모르간 법칙에 의하여

$$n(A_1 \cap A_2) = n\left(\left({A_1}^C \cup {A_2}^C\right)^C\right) = n(S) - n\left({A_1}^C \cup {A_2}^C\right) = n(S) - \left\{n\left({A_1}^C\right) + n\left({A_2}^C\right) - n\left({A_1}^C \cap {A_2}^C\right)\right\}$$

으로 바꿔 풀면 된다.

식을 정리한 결과인 $n(A_1 \cap A_2) = n(S) - \left\{n\left({A_1}^C\right) + n\left({A_2}^C\right) - n\left({A_1}^C \cap {A_2}^C\right)\right\}$만 단순히 외우지 않는 것이 중요하다.

### 예제 7. 20학년도 수능 20번

한 개의 동전을 7번 던질 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

| |
|---|
| (가) 앞면이 3번 이상 나온다.<br>(나) 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있다. |

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{23}{32}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{25}{32}$ ⑤ $\frac{13}{16}$

1. 기대쌤의 현장풀이이기도 하다. 우리는 현장에서 사용 가능한 풀이를 체화하는 것이 중요하다.
**결과론적인 풀이에 익숙해지지 않도록 하자.**

조건 (가)에서, 앞면이 3번 이상 나오는 경우는 앞면이 3, 4, 5, 6, 7번 나오는 것이다.
이에 대한 여사건은 앞면이 0, 1, 2번 나오는 것이다. 즉, 여사건이 유리한 조건임을 알 수 있다.

조건 (나) 또한 그대로 쓰는 것보다 여사건, 즉 '앞면이 연속해서 나오는 경우가 없는 사건'을 쓰는 게 더 편하다. 예를 들어, '앞앞뒤뒤앞앞뒤' 같은 것도 조건 (나)를 만족한다. 따라서, 여사건이 유리하다.

2. 이제 위에서 배운 $n(S)-\left\{n\left(A_1{}^C\right)+n\left(A_2{}^C\right)-n\left(A_1{}^C\cap A_2{}^C\right)\right\}$으로 해결해보자.

$n(S)=2^7=128,\ \ n\left(A_1{}^C\right)=1+{}_7\mathrm{C}_1+{}_7\mathrm{C}_2=29$이다.

잠깐! 갑자기 왜 끊었냐고? 여기서 잠깐 호흡을 고르자. 영리하게 풀기 위함이다.
**항상 수학 문제를 풀 때, 잠깐 멈추고 생각하는 연습을 하자.**
무작정 풀다간, 매우 비효율적으로 풀고 있는 자신을 발견하게 된다.

$n\left(A_2{}^C\right)-n\left(A_1{}^C\cap A_2{}^C\right)$를 재해석해보자. $n\left(A_2{}^C\right)-n\left(A_1{}^C\cap A_2{}^C\right)$는 곧 $n\left(A_1\cap A_2{}^C\right)$이다.
$n\left(A_1\cap A_2{}^C\right)$에 해당하는 경우의 수는 '앞면이 연속해서 나오지 않으면서 앞면이 3번 이상 나오는 경우의 수'이다.

3. '앞면이 연속해서 나오지 않으면서 앞면이 3번 이상 나오는 경우의 수'를 구해보자.
**앞면이 나오는 횟수를 기준**으로 case를 분류하자. 편의상 앞면을 ○ 모양으로, 뒷면을 X 모양으로 표시하자.

(1) 앞면이 3번, 뒷면이 4번 나올 때
○ 모양 3개, X 모양 4개를 ○ 모양끼리 이웃하지 않게 일렬로 나열해 보자.
Chapter 9에서 본격적으로 다루겠지만 **이웃하지 않아야 할 때**는 이웃해도 되는 것을 먼저 배열하고 이웃하지 말아야 하는 것들을 이웃해도 되는 것들의 사이와 양 끝의 빈 공간에 배열한다.

○ **모양끼리 이웃하지 않으므로** 이웃해도 되는 X 모양 4개를 먼저 배열한다.

빨간 체크 표시된 공간 5개 중 3개를 택하여 ○ 모양 3개를 넣으면 된다. 이에 해당하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3=10$가지이다.

(2) 앞면이 4번, 뒷면이 3번 나올 때

○ 모양 4개, X 모양 3개를 ○ 모양끼리 이웃하지 않게 일렬로 나열해 보자.

Chapter 9에서 본격적으로 다루겠지만 **이웃하지 않아야 할 때**는 이웃해도 되는 것을 먼저 배열하고 이웃하지 말아야 하는 것들을 이웃해도 되는 것들의 사이와 양 끝의 빈 공간에 배열한다.

**○ 모양끼리 이웃하지 않으므로** 이웃해도 되는 X 모양 3개를 먼저 배열한다.

빨간 체크 표시된 공간 4개 중 4개를 택하여 ○ 모양 4개를 넣으면 된다. 이에 해당하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_4 = 1$가지이다.

(3) 앞면이 5번, 뒷면이 2번 나올 때

○ 모양 5개, X 모양 2개를 ○ 모양끼리 이웃하지 않게 일렬로 나열할 수 없다. ○ 모양 5개, X 모양 2개를 어떻게 나열해도 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있어 조건 (나)를 만족한다는 뜻이다.

(4) 앞면이 6번, 뒷면이 1번 나올 때

○ 모양 6개, X 모양 1개를 ○ 모양끼리 이웃하지 않게 일렬로 나열할 수 없다. ○ 모양 6개, X 모양 1개를 어떻게 나열해도 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있어 조건 (나)를 만족한다는 뜻이다.

(5) 앞면이 7번, 뒷면이 0번 나올 때

○ 모양 7개를 ○ 모양끼리 이웃하지 않게 일렬로 나열할 수 없다. ○ 모양 7개를 어떻게 나열해도 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있어 조건 (나)를 만족한다는 뜻이다.

따라서 앞면이 연속해서 나오지 않으면서 앞면이 3번 이상 나오는 경우의 수는 $10+1=11$이다.

4. $n(A_1 \cap A_2{}^C) = 11$, $n(S) - \{n(A_1{}^C) + n(A_1 \cap A_2{}^C)\} = 2^7 - (29+11) = 88$이다.

따라서 조건을 모두 만족할 확률은 $\dfrac{88}{128} = \dfrac{11}{16}$이다. **답은 ①!!**

※ 이 풀이의 묘미는 '우리가 원할 땐 여사건을 쓰고, 원하지 않을 땐 조건을 바로 썼다는 점'이다.

$n(A_1{}^C)$를 계산할 땐 여사건을, $n(A_2{}^C) - n(A_1{}^C \cap A_2{}^C)$를 계산할 땐 $n(A_1 \cap A_2{}^C)$로 계산하여 조건 (가)를 그대로 사용해줬다.

조건 (가)는 분명 혼자 있을 땐 조건 (가)의 여사건보다 껄끄러운 조건이다.

**하지만 조건 (나)의 여사건 $A_2{}^C$과 결합되면 생각보다 간단한 조건으로 바뀜을 알 수 있다.**

**comment**

풀이에서 볼 수 있듯이 상당히 강력한 스킬이다. 강력하다고 어렵지도 않고, 추상적이지도 않다. 감으로 경우의 수와 확률을 풀고 있다면, 이와 같이 전 문항의 해설을 정리해보기 바란다.

### (6) 바로 쓰기 어려운 두 조건 $p_1, p_2$ 중 적어도 하나를 만족시키는 경우의 수

$n(A_1 \cup A_2)$를 계산해야 한다. $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$로 계산하자.

두 조건 $p_1, p$는 바로 쓰기 힘들므로 여사건으로 바꿔서 풀어주자.

$n(A_1 \cup A_2) = n\left(\left({A_1}^C\right)^C \cup \left({A_2}^C\right)^C\right) = n\left(\left({A_1}^C \cap {A_2}^C\right)^C\right) = n(S) - n\left({A_1}^C \cap {A_2}^C\right)$으로 바꿔주면 생각보다 깔끔한 모양이 나옴을 알 수 있다.

**예제 8**

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$ 의 개수를 구하시오.

(가) 함수 $f$의 역함수가 존재한다.
(나) $f(1) \neq 1$ 또는 $f(2) \neq 2$

1. 조건 $f(1) \neq 1$을 만족시키는 진리집합을 $A_1$, 조건 $f(2) \neq 2$을 만족시키는 진리집합을 $A_2$라 하자.

조건 (가)의 여사건은 $f(1) = 1$이다. 여사건이 유리한 조건임을 알 수 있다.
조건 (나)의 여사건은 $f(2) = 2$이다. 여사건이 유리한 조건임을 알 수 있다.

따라서 $n(A_1 \cup A_2)$를 $n(A_1 \cup A_2) = n(S) - n\left(A_1{}^C \cap A_2{}^C\right)$을 통해 구해보자.

2. $n(S) = 5! = 120$, $n\left(A_1{}^C \cap A_2{}^C\right) = 3! = 6$이다.
$n(A_1 \cup A_2) = n(S) - n\left(A_1{}^C \cap A_2{}^C\right) = 120 - 6 = 114$이다. **답은 114!!**

## 2. 조건이 많을 때의 포함 배제의 원리

조건이 많아지면 집합도 늘리면 된다.

세 집합 $A, B, C$ 에 대하여 다음 성질이 성립했음을 상기하자.

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$n(A\cup B\cup C)$를 계산할 때, $n(A)+n(B)+n(C)$만 하게 되면 중복되는 부분이 너무 많음을 알 수 있다. 따라서 적당한 영역을 빼주고 더해줘서 집합 $A\cup B\cup C$의 모든 영역에 있는 원소들이 한 번씩만 카운팅 되도록 조정해주는 것이다.

이를 확장하면 다음과 같이 정리할 수 있을 것이다.

〈일반적인 포함 배제의 원리〉

$n(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n)=$
$+$ (1개의 집합에 대한 모든 교집합 원소 개수의 합 : $n(A_1), n(A_2)$ 등등 총 $n$개 case)
$-$ (2개의 집합에 대한 모든 교집합 원소 개수의 합 : $n(A_1\cap A_2), n(A_1\cap A_3)$ 등등 총 ${}_n\mathrm{C}_2$개 case)
$+$ (3개의 집합에 대한 모든 교집합 원소 개수의 합 : $n(A_1\cap A_2\cap A_3), n(A_1\cap A_2\cap A_4)$ 등등 총 ${}_n\mathrm{C}_3$개 case)
$\cdots$
$+(-1)^{n+1}\times$ ($n$개의 집합에 대한 모든 교집합 원소 개수의 합 : $n(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$ 뿐)

### 예제 9

네 학생 A, B, C, D의 답안지를 걷은 뒤 임의로 다시 나눠줄 때, 어느 누구도 본인의 답안지를 돌려받지 않을 확률을 구하시오.

1. 학생 $\mathrm{A}$, $\mathrm{B}$, $\mathrm{C}$, $\mathrm{D}$ 각각이 본인의 답안지를 다시 돌려받을 사건을 $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$라 하자.
$n(E_1{}^C \cap E_2{}^C \cap E_3{}^C \cap E_4{}^C)$를 구해보자.

2. 드모르간 법칙을 이용하면 $n(E_1{}^C \cap E_2{}^C \cap E_3{}^C \cap E_4{}^C) = n(S) - n(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$이다.
$n(S) = 4!$, $n(E_1) = 3!$, $n(E_1 \cap E_2) = 2!$, $n(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1!$, $n(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = 1!$

$n(S) - n(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = 4! - \{{}_4\mathrm{C}_1 \times 3! - {}_4\mathrm{C}_2 \times 2! + {}_4\mathrm{C}_3 \times 1! - 1!\} = 9$이므로
네 학생 어느 누구도 본인의 답안지를 돌려받지 않을 확률은 $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$이다. **답은** $\frac{3}{8}$**!!**

※ **예제 9**가 교란순열 관련 문제라는 것을 알아차린 학생들도 있을 것이다. Chapter 9에서도 한 번 더 다룰 것이다.

**예제 1**을 포함 배제의 원리를 이용하여 다시 풀어보자.

**예제 1**

같은 연필 4개, 같은 지우개 5개를 세 학생 K, B, S에게 남김없이 나눠주려고 한다. 세 학생 중 학용품을 받지 못한 학생이 없도록 하는 경우의 수를 구하시오.

1. K가 학용품을 받는 사건의 진리집합을 $A_1$,
B가 학용품을 받는 사건의 진리집합을 $A_2$,
S가 학용품을 받는 사건의 진리집합을 $A_3$라 하자.

학용품을 받는 것보다 받지 않는 게 훨씬 편하므로, 여사건으로 바꿔주는 것이 우선이겠다.
우리가 구하는 경우의 수는 $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$이고, 이는 $n\left(\left(A_1^C\right)^C \cap \left(A_2{}^C\right)^C \cap \left(A_3^C\right)^C\right)$ 이다.
드모르간 법칙에 의해 이는 $n(S) - n\left(A_1^C \cup A_2^C \cup A_3^C\right)$이다.

2. $n(S) = {}_3\mathrm{H}_4 \times {}_3\mathrm{H}_5 = 315$, $n\left(A_1^C\right) = n\left(A_2^C\right) = n\left(A_3^C\right) = {}_2\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_5 = 30$,
$n\left(A_1{}^C \cap A_2{}^C\right) = n\left(A_2{}^C \cap A_3{}^C\right) = n\left(A_3{}^C \cap A_1{}^C\right) = 1$, $n\left(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C\right) = 0$

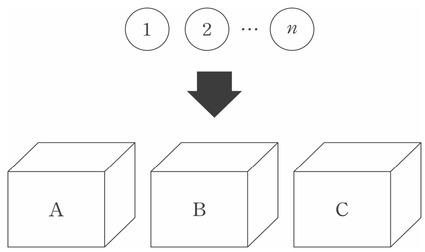
$n\left(A_1^C \cup A_2^C \cup A_3^C\right) = n\left(A_1^C\right) + n\left(A_2^C\right) + n\left(A_3^C\right)$
$-\left\{n\left(A_1{}^C \cap A_2{}^C\right) + n\left(A_2{}^C \cap A_3{}^C\right) + n\left(A_3{}^C \cap A_1{}^C\right)\right\}$
$+ n\left(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C\right) = 3 \times \left({}_2\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_5\right) - 3 \times (1) + 0 = 87$

$n(S) - n\left(A_1^C \cup A_2^C \cup A_3^C\right) = 315 - 87 = 228$이다. **답은 228!!**

<제시문1>
두 사건 $X$, $Y$가 일어나는 경우의 수가 각각 $x$, $y$이고 두 사건 $X$, $Y$가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 $X$ 또는 사건 $Y$가 일어나는 경우의 수는 $x+y$이며, 이를 합의 법칙이라고 한다. 합의 법칙은 세 개 이상의 사건에 대하여도 성립한다.

<제시문2>
사건 $X$가 일어나는 경우의 수가 $x$이고, 그 각각의 경우에 대하여 사건 $Y$가 일어나는 경우의 수가 $y$일 때, 두 사건 $X$, $Y$가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $x \times y$이며, 이를 곱의 법칙이라고 한다. 곱의 법칙은 세 개 이상의 사건에 대하여도 성립한다.

<제시문3>
양의 정수 $n$에 대하여, 오른쪽 그림과 같이 1부터 $n$까지의 숫자가 각각 적힌 $n$개의 공을 $A$, $B$, $C$라고 각각 적힌 세 개의 상자에 담으려고 할 때, 가능한 모든 경우의 수를 $S(n)$이라고 한다.




[수학 2 – i ] <제시문3>에서 $n=7$일 때, $S(7)$의 값을 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, $2^7-2^4$는 112로 표기한다.

[수학 2 – ii ] <제시문3>에서 $n=7$일 때, $A$, $B$, $C$ 세 개의 상자 모두 적어도 한 개의 공을 가지고 있을 경우의 수를 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2 – iii ] <제시문3>에서 $n=7$일 때, $A$, $B$, $C$ 세 개의 상자 모두 적어도 두 개의 공을 가지고 있을 경우의 수를 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오.

**[수학 2 – ⅰ] 해설**

$n$개의 공들이 '내가 들어갈 상자를 고를래!' 하며 들어가는 상황을 상상하자.

각 공은 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ 총 3가지 선택지가 있으므로, 자연스럽게 $3^n$이 정답이 됨을 알 수 있다.

따라서 $S(7)=3^7=2187$이다. **답은 2187!!**

※ $S(7)$이 $3^7$인지 $7^3$인지 잠깐이라도 헷갈렸다면 Chapter 3를 보고 오자. 중복순열 상황을 외우는 것이 아니라 이해하는 것이다.

**[수학 2 – ⅱ] 해설**

상자 $A$가 공을 적어도 하나 갖고 있을 조건의 진리집합을 $A_1$,

상자 $B$가 공을 적어도 하나 갖고 있을 조건의 진리집합을 $A_2$,

상자 $C$가 공을 적어도 하나 갖고 있을 조건의 진리집합을 $A_3$라 하자.

예제1과 같이 구하는 값은 $n(A_1\cap A_2\cap A_3)=n(S)-n\left(A_1^C\cup A_2^C\cup A_3^C\right)$임을 알 수 있다.

$n(S)=3^7=2187$, $n\left(A_1^C\right)=n\left(A_2^C\right)=n\left(A_3^C\right)=2^7$,

$n\left(A_1{}^C\cap A_2{}^C\right)=n\left(A_2{}^C\cap A_3{}^C\right)=n\left(A_3{}^C\cap A_1{}^C\right)=1$, $n\left(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\right)=0$

$n\left(A_1^C\cup A_2^C\cup A_3^C\right)=n\left(A_1^C\right)+n\left(A_2^C\right)+n\left(A_3^C\right)$

$-\left\{n\left(A_1{}^C\cap A_2{}^C\right)+n\left(A_2{}^C\cap A_3{}^C\right)+n\left(A_3{}^C\cap A_1{}^C\right)\right\}+n\left(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\right)=3\times\left(2^7\right)$

$-3\times(1)+0=381$이므로

$n(A_1\cap A_2\cap A_3)=n(S)-n\left(A_1^C\cup A_2^C\cup A_3^C\right)=2187-381=1806$이다. **답은 1806!!**

**[수학 2 – ⅲ] 해설**

상자 $A$가 공을 두 개 이상 갖고 있을 조건의 진리집합을 $A_4$,

상자 $B$가 공을 두 개 이상 갖고 있을 조건의 진리집합을 $A_5$,

상자 $C$가 공을 두 개 이상 갖고 있을 조건의 진리집합을 $A_6$ 라 하자.

위의 **[수학 2 – ⅱ]**와 같이 구하는 값은

$n(A_4\cap A_5\cap A_6)=n(S)-n\left(A_4^C\cup A_5^C\cup A_6^C\right)$ 임을 알 수 있다.

$n\left(A_4^C\cup A_5^C\cup A_6^C\right)=n\left(A_4^C\right)+n\left(A_5^C\right)+n\left(A_6^C\right)$

$-\left\{n\left(A_4{}^C\cap A_5{}^C\right)+n\left(A_5{}^C\cap A_6{}^C\right)+n\left(A_6{}^C\cap A_4{}^C\right)\right\}+n\left(A_4^C\cap A_5^C\cap A_6^C\right)$를 적용하면 쉽게 끝날까?

여기서 잠깐 호흡을 고르자. 영리하게 풀기 위함이다.

$A_4{}^C$, $A_5{}^C$, $A_6{}^C$은 상자에 공이 0개 혹은 1개 있는 상황을 의미한다.

**[수학 2 – ⅱ]**에서와 달리 상자에 공이 0개로 고정된 상황이 아니라서 구하기 어렵다.

**따라서 이는 여사건을 활용하기 어려운 문제이므로, 변형을 하지 않고 담백하게 풀어야 한다.**

$A$, $B$, $C$ 세 상자가 모두 적어도 두 개의 공을 가지고 있을 상황으로 다시 돌아가자.
이때, 넣을 공의 개수가 7개밖에 안 되므로, 문제의 조건을 만족하면서
각 상자에 넣을 수 있는 공의 개수 조합은 $(2,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 2)$, $(3,\ 2,\ 2)$뿐임을 알 수 있다.
따라서 $A$, $B$, $C$ 세 상자가 모두 적어도 두 개의 공을 가지고 있는 경우의 수는
$3 \times {}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_3 = 630$이다. **답은 630!!**

### 시립대학교 2020 모의논술

주사위를 $k$번 던져서 나온 눈의 최솟값을 $a$, 최댓값을 $b$라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) $b-a=3$인 경우의 수를 구하여라.

(b) 처음 던진 주사위의 눈이 5가 나왔을 때, $b-a=3$일 확률을 구하여라.

### (a) 해설

$b-a=3$인 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6)$으로 3개이며, 그 사건을 각각 $A_1,\ A_2,\ A_3$라 하자.
$n(A)$를 사건 $A$가 일어나는 경우의 수라 할 때, $b-a=3$인 경우의 수는
$n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)$이다.

$(a,\ b)=(1,\ 4)$인 경우에, 모든 주사위의 눈이 $1$씩 더 나온다면 $(a,\ b)=(2,\ 5)$인 경우가 된다.
즉, $n(A_1)=n(A_2)$이다. 같은 방법으로 $n(A_2)=n(A_3)$이다.

따라서 $b-a=3$인 경우의 수는 $3\times n(A_1)$ $\cdots$ ① 이다.
$n(A_1)$을 구하기 위해 다음의 사건을 정의하자.

$B$=주사위를 $k$번 던져서 나온 모든 눈이 1 이상 4 이하인 사건
$C$=주사위를 $k$번 던져서 나온 모든 눈이 2 이상 4 이하인 사건
$D$=주사위를 $k$번 던져서 나온 모든 눈이 1 이상 3 이하인 사건

이때 $A_1=B-(C\cup D)$, $C\cup D\subset B$ 이므로 $n(A_1)=n(B)-n(C\cup D)$이다.
또한 $n(B)=4^k$, $n(C)=n(D)=3^k$이고 $n(C\cap D)$는 주사위를 $k$번 던져서 나온 모든 눈이 2 또는 3인 사건이므로 $2^k$이다.
따라서 $n(C\cup D)=n(C)+n(D)-n(C\cap D)=2\times 3^k-2^k$ 이므로
$n(A_1)=4^k-2\times 3^k+2^k$이다.

따라서 $b-a=3$인 경우의 수는 $3\times\left(4^k-2\times 3^k+2^k\right)$이다.

### (b) 해설

$b-a=3$인 사건을 $E$, 처음 던진 주사위의 눈이 5가 나온 사건을 $F$ 라 하자.
$\mathrm{P}(E\cap F)=\dfrac{n(E\cap F)}{6^k}$이고 $\mathrm{P}(F)=\dfrac{1}{6}$이다.

처음 던진 주사위의 눈이 5가 나왔을 때, $b-a=3$일 확률은 $\mathrm{P}(E\mid F)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(F)}=\dfrac{n(E\cap F)}{6^{k-1}}$
이다.

처음 던진 주사위의 눈이 5가 나왔을 때, $b-a=3$인 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 5)$ 또는 $(3,\ 6)$이어야 한다.
즉, 사건 $E\cap F$가 일어나는 경우는 첫 번째 주사위를 던진 이후에 주사위를 $k-1$번 던져 나온 눈의 최솟값과 최댓값의 순서쌍이 $(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6)$일 때이다. 이때, 각각의 사건을 $G_1,\ \cdots,\ G_5$라 하자.

그러면 $n(E\cap F)=\sum_{k=1}^{5}n(G_k)$ 이고 각각의 값을 구하면 $n(G_1)=1$, $n(G_2)=2^{k-1}-2$, $n(G_3)=3^{k-1}-2\times 2^{k-1}+1$, $n(G_4)=n(G_5)=4^{k-1}-2\times 3^{k-1}+2^{k-1}$이므로

$n(E\cap F)=\sum_{k=1}^{5}n(G_k)=2\times 4^{k-1}-3^k+2^{k-1}$ 이다.

따라서 정답은 $\dfrac{2\times 4^{k-1}-3^k+2^{k-1}}{6^{k-1}}$ 이다.

CHAPTER

# 02 문제

## 01 16학년도 6월 평가원 27번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$, $u$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수를 구하시오. [4점]

| |
|---|
| (가) $x+y+z+u=6$ |
| (나) $x \neq u$ |

## 02 15학년도 6월 평가원 20번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a$, $b$, $c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는? [4점]

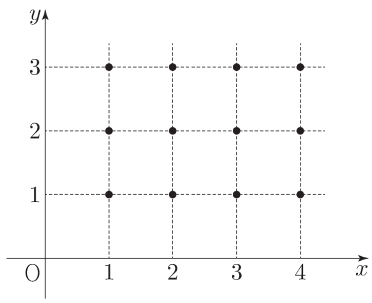
| |
|---|
| (가) $a+b+c=6$ |
| (나) 좌표평면에서 세 점 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$가 한 직선 위에 있지 않다. |

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

## 03 20학년도 9월 평가원 나형 14번

다음 조건을 만족시키는 좌표평면 위의 점 $(a,\ b)$중에서 임의로 서로 다른 두 점을 선택할 때, 선택된 두 점 사이의 거리가 1보다 클 확률은? [4점]

| |
|---|
| (가) $a,\ b$는 자연수이다. |
| (나) $1 \le a \le 4,\ 1 \le b \le 3$ |




① $\dfrac{41}{66}$　② $\dfrac{43}{66}$　③ $\dfrac{15}{22}$　④ $\dfrac{47}{66}$　⑤ $\dfrac{49}{66}$

CHAPTER

# 02 해설

## 01 16학년도 6월 평가원 27번

**답 : 68**

1. **먼저 실수를 방지하기 위해 '음이 아닌 정수'에 동그라미 쳐주자.** 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 중복조합(${}_4\mathrm{H}_6$)을 쓰든 이후에 소개해 주는 방법(${}_9\mathrm{C}_3$)으로 하든 84가지이다.

2. 여사건이 더 편할까? (나)$^C$는 $x=u$**인 사건이다. (가)∩(나)를 만족시키는 순서쌍** $(x, y, z, u)$**의 개수보다** (가)∩(나)$^C$를 만족시키는 순서쌍 $(x, y, z, u)$의 개수를 구하기가 훨씬 쉬워 보인다.

3. (가)∩(나)$^C$는 $x+y+z+u=6$, $x=u$를 동시에 만족시키는 순서쌍 $(x, y, z, u)$의 개수이다. $x=u$이면 $2x+y+z=6$이다. $x$를 **기준**으로 case 분류를 하자.

   (1) $x=0$일 때 $y+z=6$을 만족하는 순서쌍 $(y, z)$의 수는 ${}_2\mathrm{H}_6={}_7\mathrm{C}_1=7$
   (2) $x=1$일 때 $y+z=4$을 만족하는 순서쌍 $(y, z)$의 수는 ${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$
   (3) $x=2$일 때 $y+z=2$을 만족하는 순서쌍 $(y, z)$의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$
   (4) $x=3$일 때 $y+z=0$을 만족하는 순서쌍 $(y, z)$의 수는 ${}_2\mathrm{H}_0={}_1\mathrm{C}_1=1$

4. (가)∩(나)$^C$에 해당하는 경우의 수는 $7+5+3+1=16$이다. 따라서 조건 (가), 조건 (나)를 동시에 만족시키는 경우의 수는 $84-16=68$이다.

## 02 15학년도 6월 평가원 20번

**답 : ⑤**

1. **먼저 실수를 방지하기 위해 '음이 아닌 정수'에 동그라미 쳐주자.** 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 중복조합(${}_3\mathrm{H}_6$)을 쓰든 이후에 소개해 주는 방법(${}_8\mathrm{C}_2$)으로 하든 28가지이다.

2. 여사건이 더 편할까? (나)$^C$**는 '세 점** $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$**가 한 직선 위에 있는 사건'이다.**
   (가)∩(나)를 **만족시키는 순서쌍** $(a,\ b,\ c)$**의 개수보다** (가)∩(나)$^C$를 만족시키는 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수를 구하기가 훨씬 쉬워 보인다.

3. (가)$\cap$(나)$^C$는 $a+b+c=6$을 만족하며 세 점 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$가 한 직선 위에 있게 하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수이다.

   세 점 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$가 한 직선 위에 있게 하려면 $a$, $b$, $c$가 등차수열을 이뤄야 하므로 $2b=a+c$이다. $a+b+c=6$이므로 여기에 $2b=a+c$를 대입하면 $a+c=4$, $b=2$이다.

   $a+c=4$를 만족하는 순서쌍 $(a,\ c)$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_4=5$이다.
   따라서 (가)$\cap$(나)$^C$에 해당하는 경우의 수는 5이다.

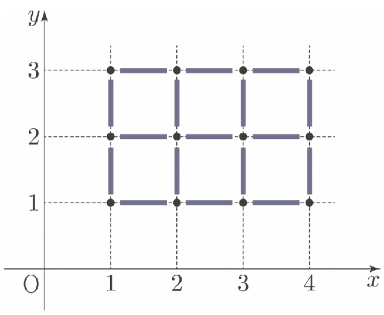
4. 조건 (가), 조건 (나)를 동시에 만족시키는 경우의 수는 $28-5=23$이다.

## 03 20학년도 9월 평가원 나형 14번

**답 : ⑤**

1. 12개의 점 중 서로 다른 점 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_{12}\mathrm{C}_2=66$이다.

2. 여사건이 더 편할까? '선택된 두 점 사이의 거리가 1보다 클 사건'의 **여사건은 선택된 두 점 사이의 거리가 1인 경우뿐**이다. 선택된 두 점 사이의 거리가 1보다 작아질 수 없기 때문이다. 따라서 여사건을 이용하는 것이 훨씬 편하다.




   위의 그림에서 알 수 있듯이 선택된 두 점 사이의 거리가 1인 경우의 수는 $3\times3+2\times4=17$이다. 따라서 선택된 두 점 사이의 거리가 1보다 클 사건의 경우의 수는 $66-17=49$이다.

3. 선택된 두 점 사이의 거리가 1보다 클 확률은 $\dfrac{49}{66}$이다.